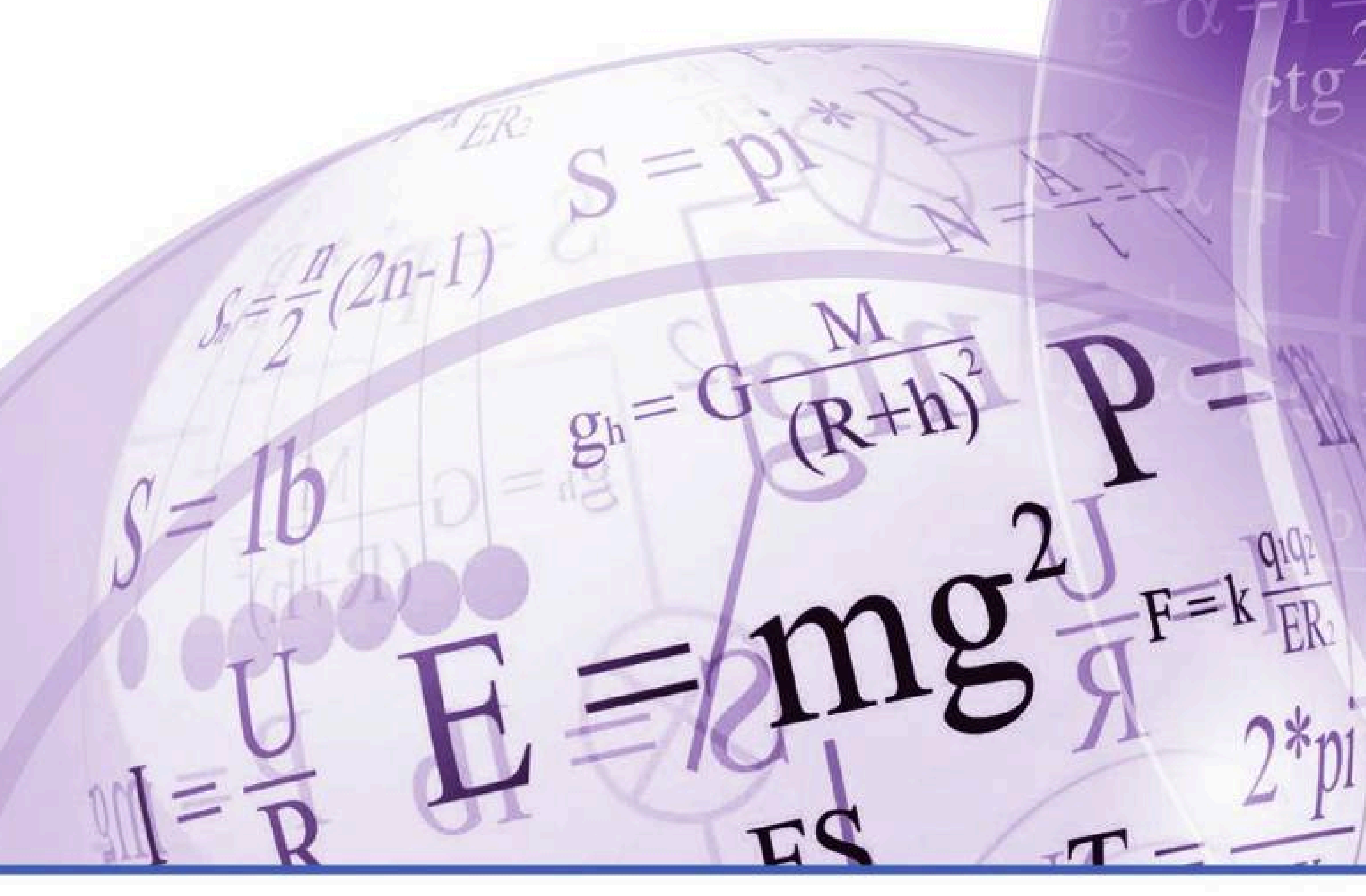
رياضيات الأولمبياد

مرحلة الإعداد

التركيبات

معروف عبدالرحمن سمحان

عبدالعزيز بن عبيد









رياضيات الأولمبياد

مرحلة الإعداد



معروف عبدالرحمن سمحان

عبدالعزيز بن عبيد



مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع

King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity



ح العبيكان، ١٤٣٦هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر.
سمحان، معروف عبدالرحمن.
رياضيات الأولمبياد - مرحلة الإعداد: التركيبات.
معروف عبدالرحمن سمحان؛ عبدالعزيز عبيد.
الرياض، ١٤٣٦هـ.
٢٧٦ ص؛ ١٦,٥ × ٢٤ سم.
ردمك: ٤ -٨٠٣-٥٠٣-٦٠٣-٩٧٨
١- الرياضيات - تعليم. ٢- الأعداد.
أ. عبيد، عبدالعزيز (مؤلف مشارك) ب. العنوان
ديوي ٥١٠,٧ رقم الإيداع ١٤٣٦/٧٣٠٦

الطبعة الأولى
١٤٣٦هـ / ٢٠١٥م

الناشر العبيكان Obeikan للنشر
المملكة العربية السعودية - الرياض - المحمدية
طريق الأمير تركي بن عبدالعزيز الأول
هاتف ٤٨٠٨٦٥٤ فاكس ٤٨٠٨٠٩٥
ص.ب ٦٧٦٢٢ الرياض ١١٥١٧

موقعنا على الإنترنت
www.obeikanpublishing.com
متجر العبيكان Obeikan على أبل
http://itunes.apple.com/sa/app/obeikan-store

امتياز التوزيع شركة مكتبة العبيكان Obeikan
المملكة العربية السعودية - الرياض - المحمدية
طريق الأمير تركي بن عبدالعزيز الأول
هاتف ٤٨٠٨٦٥٤ فاكس ٤٨٨٩٠٢٣
ص. ب ٦٢٨٠٧ الرمز ١١٥٩٥
www.obeikanretail.com



مقدمة

Introduction

تعد مسابقات الرياضيات التي يتم تنظيمها دورياً من سمات القرن العشرين، حيث ازداد عدد المتقدمين لهذه المسابقات بشكل ملحوظ وسجلت السنوات الأخيرة أعداداً تجاوزت عشرات الملايين، ولهذه الزيادة في أعداد المتسابقين أسباب عديدة من أهمها، أن هذه المسابقات هي وسيلة للتعرف على الطلاب الموهوبين والمبدعين الذين يواصلون دراستهم بتفوق، ليس في الرياضيات فقط وإنما في المجالات العلمية المختلفة. كما أن للمسابقات تأثيراً إيجابياً على التعليم، إذ أنها أدت إلى إنشاء أندية علمية في المدارس وإلى تطوير مواد إثرائية في العديد من دول العالم، انعكس أثرها على تطوير المناهج التعليمية وأدى إلى بروز باحثين متميزين في الرياضيات أسهموا في حل العديد من المسائل العلمية الصعبة. كما أن لمسابقات الرياضيات تأثيراً إيجابياً على تغيير ثقافة المجتمعات ونظرتهم إلى مادة الرياضيات.

عقدت أول مسابقة أولمبياد دولية في الرياضيات (IMO) في رومانيا عام١٩٥٩م حيث بلغ عدد الدول المشاركة في هذه المسابقة سبع دول. بعد ذلك توالى عقد المسابقة سنوياً وبانتظام إلى وقتنا الحاضر (ماعدا العام ١٩٨٠م بسبب ظروف طرأت على الدولة المضيفة). ولقد ازداد عدد الدول المشاركة باطراد إلى أن وصل عدد الدول المشاركة في العام ٢٠٠٩م إلى ١٠٤ دولة.

كان أول اشتراك للملكة العربية السعودية في الأولمبياد الدولي في العام ٢٠٠٤م حيث كان أداء الفريق السعودي متواضعاً نتيجة لقلة الخبرة والاعداد الجيد في التدريب. استمر هذا الأداء المتواضع إلى العام ٢٠٠٨م. بعد ذلك أوكلت وزارة

التربية والتعليم مهمة الإعداد للأولمبياد لمؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع "موهبة" واتخذت موهبة عدة قرارات نوعية تحسب لها، أهمها الاستفادة من خبرات الدول المتفوقة في مسابقة الأولمبياد في إعداد البرامج التدريبية للفريق السعودي. ومن القرارات الأخرى المهمة، توفير مادة تدريبية باللغة العربية تغطي مراحل التدريب المختلفة فأوعزت إلى فريق من الأكاديميين المهتمين بالمسابقات بوضع سلسلتين من الكتب، السلسلة الأولى تخدم مرحلة الأعداد للراغبين في التدريب المبكر، وأما السلسلة الثانية فهي موجهة للمراحل المتقدمة. تحتوي السلسلة الأولى على ثمانية كتب تعالج أربعة مواضيع هي نظرية الأعداد، الجبر، الهندسة، التركيبات. وكل من هذه الكتب مكون من جزأين ليغطي المرحلة الأولى والثانية من تدريب الناشئين. أما السلسلة الثانية فموجهة إلى المرحلتين الثالثة والرابعة من التدريب ومكونة من عشرة كتب تغطي المواضيع الأربعة السابقة المطلوب من المتدرب معرفتها للتحضير لمسابقة الأولمبياد.

هذا الكتاب هو كتاب التركيبات لمرحلة الإعداد ويتكون من أربعة فصول هي مبادئ العد الأساسية، التباديل والتوافيق، معاملات ذات الحدين، الاحتمالات.

ولقد حرصنا أن تكون المسائل متنوعة وبمستويات صعوبة تتفق مع الاختلاف في القدرات بين الطلاب حيث العديد منها مأخوذ من مسائل مسابقات الناشئين لعدة دول، منها الولايات المتحدة الأمريكية، كندا، المملكة المتحدة، أستراليا. إن الهدف الأهم من هذه الكتب هو أن يتمكن الطالب من فهم المادة المطروحة حتى مع غياب المدرب ثم يقوم بمحاولة حل المسائل دون النظر إلى حلولها ومن ثم يقوم بمقارنة حلوله مع الحلول المقدمة في الكتاب لهذه المسائل. كما يتضمن الكتاب مسائل غير محلولة مع وجود الإجابات النهائية لها لزيادة التحدي لدى الطلاب.

الوسيلة الوحيدة للتعلم والتدريب على حل المسائل هي أن يقضي الطالب وقتاً كافياً في التفكير في المسألة ثم يضع لنفسه استراتيجية لحل المسألة، بعد ذلك يجرب هذه الاستراتيجية لمعرفة مدى نجاحها، وقد يضطر إلى تعديلها بصورة تدريجية إلى أن يصل إلى الحل الصحيح. إن تكرار المحاولات في مسائل مختلفة ومتنوعة تكسب الطالب الخبرة اللازمة للوصول إلى المستوى التنافسي في المسابقات.

وفي النهاية نتقدم بالشكر والتقدير إلى مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع "موهبة" على اهتمامها بوضع برامج مدروسة دراسة جيدة لتدريب الطلاب على المسابقات، سواء المسابقات المحلية أو مسابقات الأولمبياد مما شجعنا على القيام بتأليف هذا الكتاب، الذي نرجو من الله أن يجعله محققاً للهدف الذي أعد من أجله، كما نرجوه أن يوفق طلابنا وطالباتنا في المنافسة على المستويين الوطني والعالمي.

المؤلفان

الرياض

١٤٣٤هـ (2013م)

المحتويات

المختصرات
Abbreviations

AHSME: American High School Mathematics Examination

AIME: American Invitational Mathematics Examination

AMC10: American Mathematics Contest 10

AMC12: American Mathematics Contest 12

Aust.MC: Australian Mathematics Competition

MAΘ: Mu Alpha Theta

PACAT: Permutation And Combination Aptitude Test

TFAOC: The Fine Art of Counting

UOSCHSMC: University of South Carolina High School Mathematics Contest.

الفصل الأول

مبادئ العد الأساسية
Basic counting Principles

نتناول في هذا الفصل المبادئ الأساسية للعد وهي مبادئ الجمع والضرب والتقابل.

عد الصفحات[Counting Pages]

لنفرض أن أحمد قام بقراءة الصفحات من 124إلى 312من كتاب المطالعة. ما عدد الصفحات التي قرأها أحمد ؟ لاحظ أن أحمد قام بقراءة الصفحات

$$124\,,\,125\,,\,126\,,\,\ldots\,,\,312$$

وإذا قمنا بطرح العدد 123من كل من حدود هذه المتتابعة فإن عدد حدود المتتابعة يبقى ثابتاً. وبهذا نحصل على المتتابعة

$$1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,189$$

ومن الواضح الآن أن عدد الصفحات التي قرأها أحمد هو عدد حدود المتتابعة

$$1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,189$$

وهو 189. وبصورة عامة إذا كان aو bعددين صحيحين موجبين حيث $a < b$فإن عدد الأعداد الصحيحة xحيث $a < x < b$ يساوي

$$(b-a)-1$$

وإن عدد الأعداد الصحيحة x حيث $a \leq x \leq b$ هو

$$(b-a)+1$$

مثال (١) كم عدد الأعداد الزوجية x حيث $1 \leq x \leq 413$؟

الحل

يمكن حل هذه المسألة بكتابة متتابعة الأعداد المطلوب إيجاد عددها وهي

$$2\,,4\,,6\,,\ldots\,,412$$

وبقسمة كل من حدود هذه المتتابعة على العدد 2 نحصل على المتتابعة

$$1\,,2\,,3\,,\ldots\,,206$$

وعدد حدود هذه المتتابعة يساوي عدد حدود المتتابعة السابقة وهو 206. ◇

مثال (٢) لدينا 123 عدداً متتالياً. إذا كان أكبر هذه الأعداد هو 414 فما أصغرها ؟

الحل

بما أن عدد الأعداد المتتالية هو 123 وأكبرها 414 فإنه يوجد 122 عدداً قبل العدد 414 . وبهذا يكون أصغر هذه الأعداد هو $414-122=292$. ◇

مثال (٣) لدينا مسطرة غير مُعَلَّمة طولها 30 سم. أردنا تعليم هذه المسطرة بوضع علامات عند كل سم وكل نصف سم وكل ربع سم. كم عدد العلامات اللازمة لذلك ؟

الحل

عدد العلامات عند كل سم هو عدد الأعداد الصحيحة x حيث $0 \leq x \leq 30$ وهو

$$(30-0)+1=31$$

الآن، نضع علامة في منتصف كل فترة جزئية طولها 1سم. وبهذا نحتاج إلى 30 علامة أخرى.ولتعليم أرباع السنتمتر نحتاج لوضع علامة في منتصف كل فترة جزئية طولها $\frac{1}{2}$سم وعدد هذه الفترات الجزئية هو 60. ولذا نحتاج إلى 60علامة أخرى. إذن، العدد الكلي للعلامات التي نحتاج إليها هو $121=60+30+31$. ◇

مثال (٤) كم عدد مضاعفات العدد 11الواقعة بين 1و 2000؟

الحل

الأعداد المطلوبة هي $11 , 22 , 33 , \ldots , 1991$. بقسمة كل من هذه الأعداد على 11نحصل على المتتابعة $1 , 2 , 3 , \ldots , 181$وعدد حدودها 181. ◇

ملحوظة

يمكن إيجاد عدد هذه الأعداد على النحو التالي: $\left\lfloor \frac{2000}{11} \right\rfloor = 181$

حيث $\lfloor x \rfloor$يعني أكبر عدد صحيح أصغر من أو يساوي x.

مثال (٥) كم عدد الأعداد الصحيحة بين 1و 2000التي من مضاعفات العدد 11 ومن مضاعفات العدد 3 ؟

الحل

لاحظ أن أي مضاعف للعدد 11والعدد 3هو مضاعف للعدد 33. لذا يكون المطلوب هو إيجاد عدد مضاعفات 33بين 1و 2000وهذا العدد هو $\left\lfloor \frac{2000}{33} \right\rfloor = 60$. ◇

مثال (٦) كم عدد الأعداد الصحيحة بين 1و 2000التي من مضاعفات العدد 11 وليست من مضاعفات العدد 3؟

الحل

الأعداد التي من مضاعفات العدد 11وليست من مضاعفات العدد 3هي الأعداد التي من مضاعفات العدد 11وليست من مضاعفات العدد 33 .

عدد مضاعفات العدد 11يساوي $181 = \left\lfloor \frac{2000}{11} \right\rfloor$.

عدد مضاعفات العدد 33يساوي $60 = \left\lfloor \frac{2000}{33} \right\rfloor$.

إذن، عدد الأعداد المطلوبة هو $121 = 60 - 181$. ◇

مثال (٧) ما عدد المربعات الكاملة بين العددين 15و 626؟

الحل

أصغر هذه المربعات هو $16 = 4^2$وأكبرها هو $625 = 25^2$. إذن، المطلوب هو عدد الأعداد xحيث $4 \le x \le 25$.وهذا العدد يساوي $(25 - 4) + 1 = 22$. ◇

مبدأ الجمع[Addition Principle]

إذا أردنا اختيار طالب من الصف الأول أو الثاني أو الثالث ثانوي ليمثل مدرسة عمر بن الخطاب في مسابقة الرياضيات التي تعقد في مدينة الرياض وإذا كان عدد طلاب الصفوف الأول والثاني والثالث ثانوي هي 32، 29، 25، على التوالي فإن عدد الطرق المختلفة لاختيار الطالب هي

$$32 + 29 + 25 - = 86$$

هذا المثال هو مثال على مبدأ عد يسمى مبدأ الجمع (Addition Principle) وينص على

إذا كان إنجاز المهمة T يتطلب إنجاز أي من المهمات $T_1 , T_2 , \dots , T_k$ وإذا استحال إنجاز أي مهمتين T_i و T_j حيث $i \neq j$ في الوقت نفسه وكان عدد طرق إنجاز المهمة T_r يساوي n_r فإن عدد طرق إنجاز المهمة T يساوي

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

ملحوظة

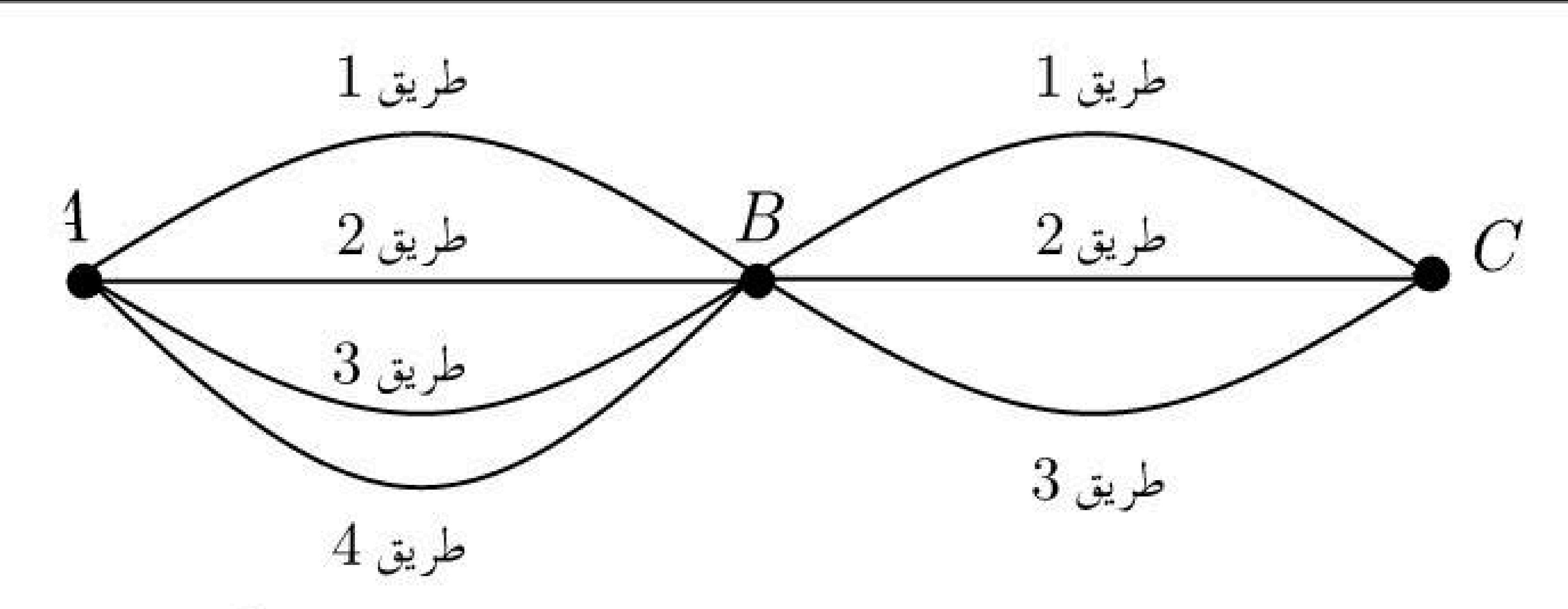
يمكن استخدام مفهوم المجموعات للتعبير عن مبدأ الجمع على النحو التالي:
نفرض أن T_i هي مهمة اختيار عنصر من المجموعة A_i لكل $i = 1 , 2 , \dots , k$.
إذن، عدد طرق إنجاز المهمة T_i هو $|A_i|$. وبما أنه لا يمكن إنجاز مهمتين مختلفتين في الوقت نفسه فإن $A_i \cap A_j = \phi$ لكل $i \neq j$. وبهذا عدد طرق إنجاز المهمة T هو

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|.$$

مثال (٨) لنفرض أن لدينا ثلاث مدن A ، B ، C ولنفرض وجود 4 طرق مختلفة يستطيع أن يسلكها فيصل للوصول إلى المدينة B من المدينة A وثلاثة طرق مختلفة يستطيع أن يسلكها فيصل للوصول إلى المدينة C من المدينة B. كم عدد الطرق المختلفة التي يستطيع أن يسلكها فيصل للوصول إلى C منطلقاً من A مروراً بالمدينة B ؟

الحل

الشكل المرفق يبين جميع الطرق المختلفة



إذا سلك فيصل الطريق 1 من A إلى B فإنه يمكن أن يسلك أياً من الطرق الثلاثة من B إلى C ليصل إلى C. وبالمثل، إذا سلك فيصل الطريق 2 أو الطريق 3 أو الطريق 4. إذن، باستخدام مبدأ الجمع يكون عدد الطرق المختلفة للوصول إلى C عبر B هو $12 = 3 + 3 + 3 + 3$. ◇

لاحظ أنه يمكن حل المثال (٥) على النحو التالي: يوجد 4 خيارات للانطلاق من A إلى B ولكل من هذه الخيارات يوجد 3 خيارات للوصول من B إلى C. إذن، عدد الخيارات الممكنة هو $12 = 3 \times 4$. إن هذا يقودنا إلى مبدأ العد الثاني وهو مبدأ الضرب.

مبدأ الضرب [Multiplication Principle]

إذا تطلب إنجاز المهمة T إنجاز المهمات $T_1 , T_2 , \ldots , T_k$ واحدة بعد الأخرى. (أي إنجاز T_1 ثم T_2 ثم T_3 وهكذا) وكان عدد طرق إنجاز المهمة T_i هو n_i وكان عدد طرق إنجاز المهمة T_i لا يعتمد على كيفية إنجاز المهمات السابقة لها فإن عدد طرق إنجاز المهمة T هو $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$.

مثال (٩) يقدم أحد المطاعم شطائر لحم بثلاثة أحجام هي صغير، متوسط، كبير. يمكن أن يضاف إلى كل شطيرة الجبن أو الطماطم أو كلاهما. أراد فيصل أن يطلب

شطيرة لحم. ما عدد الخيارات المتاحة له؟

الحل

يمكن حل هذا المثال باستخدام مبدأ الضرب. يوجد 3 طرق لاختيار شطيرة اللحم وهي صغير، متوسط، كبير. يوجد خياران للجبن (إما أن يضاف الجبن أو لا يضاف). يوجد خياران للطماطم (إما أن يضاف الطماطم أو لا يضاف). إذن، حسب مبدأ الضرب يكون عدد الخيارات المختلفة للشطيرة هو

$$3 \times 2 \times 2 = 12.$$

وبما أن عدد هذه الخيارات صغير نسبياً فيمكن سرد هذه الخيارات على النحو التالي:

$$(S,C,T),(S,C,NT),(S,NC,T),(S,NC,NT)$$
$$(M,C,T),(M,C,NT),(M,NC,T),(M,NC,NT)$$
$$(L,C,T),(L,C,NT),(L,NC,T),(L,NC,NT)$$

حيث S ، M ، T ترمز إلى صغير، متوسط، كبير على التوالي و C ، NC ترمز إلى إضافة جبنة أو عدم إضافة جبنة و T ، NT ترمز إلى إضافة طماطم أو عدم إضافة طماطم. ◇

مثال (١٠) محل أحذية لديه 6 أنواع من الأحذية وكل نوع متوافر بسبعة ألوان. كم عدد خيارات الأحذية المختلفة المتوفرة في هذا المحل ؟

الحل

يمكننا اختيار أي من الأنواع المتوافرة الستة من الأحذية ويمكن وبشكل منفصل أن نختار لوناً من أي من الألوان المتوافرة السبعة من كل نوع وبالتالي سيكون لدينا $6 \times 7 = 42$ اختياراً من الأحذية المختلفة استناداً إلى مبدأ الضرب. ◇

مثال (١١) اشترى توفيق قفلاً رقمياً لدراجته يفتح باستعمال ثلاثة أرقام مختلفة من بين الأرقام 1 إلى 9. بكم طريقة يمكنه أن يختار أرقام القفل ؟

الحل

لتصور الحل سنمثل خانات القفل كما يلي

الأولى	الثانية	الثالثة

يمكن لتوفيق أن يختار أي عدد من 1 إلى 9 للخانة الأولى من الرقم السري وبعد اختيار أحد الأرقام التسعة للخانة الأولى وبما أن تكرار العدد ممنوع فسيختار العدد للخانة الثانية من الرقم السري من بين الثمانية أعداد المتبقية. إلى الآن تم اختيار عددين من 9 وبقي 7 أعداد سيتم اختيار أحدها للخانة الثالثة من الرقم السري. وبالتالي من مبدأ الضرب نجد أن عدد الأرقام السرية الممكنة المختلفة للقفل يساوي $9 \times 8 \times 7 = 504$ رقماً. ◇

مثال (١٢) تتكون لوحات السيارات في المملكة العربية السعودية من ثلاثة حروف مختارة من اللغة العربية (عدد حروفها 28 حرفاً) متبوعة بأربعة أرقام مختارة من بين الأرقام 0 إلى 9. ما عدد لوحات السيارات الممكنة ؟

الحل

يمكن اختيار أي من الحروف الثلاثة بعدد من الطرق يساوي 28. ولذا عدد طرق اختيار ثلاثة حروف هو $28 \times 28 \times 28 = 21952$. ويمكن اختيار أي من الأرقام الأربعة بعدد من الطرق يساوي 10. ولذا عدد طرق اختيار أربعة أرقام هو $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$. إذن، عدد لوحات السيارات المختلفة هو

$21952 \times 10000 = 219520000$. ◇

مثال (١٣) إذا كانت A مجموعة منتهية عدد عناصرها m وكانت B مجموعة

منتهية عدد عناصرها n. ما عدد التطبيقات $f : A \to B$؟

الحل

لاحظ أن التطبيق يتحدد باختيار عنصر من عناصر المجال المقابل B (عددها n) لكل عنصر من عناصر المجال A (عددها m). إذن، استناداً إلى مبدأ الضرب نجد أن عدد التطبيقات المختلفة هو $n^m = n \times n \times \cdots \times n$. ◇

مبدأ التقابل [Correspondence Principle]

إذا كانت A و B مجموعتين منتهيتين وكان عدد عناصر A معلوماً واستطعنا إيجاد تقابل بين A و B فيكون عدد عناصر B يساوي عدد عناصر A. هذا هو مبدأ التقابل وينص على:

إذا كان $f : A \to B$ تقابلاً بين المجموعتين المنتهيتين A و B فإن $\|B\| = \|A\|$.

مثال (١٤) ما عدد الكلمات الثنائية (الكلمة الثنائية تستخدم الرقمين 0 و 1) من الطول m؟

الحل

لنفرض أن $a_1a_2 \dots a_m$ كلمة ثنائية طولها m. يوجد خياران (إما 0 أو 1) لكل a_i. إذن، استناداً إلى مبدأ الضرب يكون عدد الكلمات الثنائية من الطول m هو $2^m = 2 \times 2 \times \cdots \times 2$. ◇

مثال (١٥) لتكن A مجموعة منتهية عدد عناصرها m. ما عدد المجموعات الجزئية المختلفة من المجموعة A؟

الحل

نستخدم مبدأ التقابل لإيجاد عدد المجموعات الجزئية من المجموعة A. لنفرض أن $P(A) = \{B : B \subseteq A\}$. ولنفرض أن S هي مجموعة الكلمات الثنائية من الطول m. نعرف التقابل $f : P(A) \to S$ على النحو التالي: $B \in P(A)$ يكون $f(B)$ هو الكلمة $a_1 a_2 \dots a_m \in S$ حيث $a_i = 1$ إذا كان $a_i \in B$ و $a_i = 0$ إذا كان $a_i \notin B$. إذن، من مبدأ التقابل نجد أن $\left|P(A)\right| = \left|S\right|$. ولكننا وجدنا في المثال (١٤) أن $\left|S\right| = 2^m$. إذن، $\left|P(A)\right| = 2^m$. ◇

في العديد من مسائل العد نحتاج إلى تقسيم المسألة إلى حالات ومن ثم الاستفادة من مبدأي الجمع والضرب ونوضح ذلك ببعض الأمثلة.

مثال (١٦) كم عدد الأعداد الصحيحة غير السالبة المكونة من ثلاث خانات مختارة من الأرقام 0 إلى 9 بحيث تكون جميع خاناتها زوجية وفيها خانتان مكررتان فقط ؟

الحل

لدينا الحالات الثلاثة التالية لهذه الأعداد:

الحالة الأولى: yxx حيث $y \neq 0$. في هذه الحالة يوجد أربعة خيارات للمرتبة (الخانة) y وهي 2 أو 4 أو 6 أو 8. بعد اختيار المرتبة y يتبقى أربعة خيارات للمرتبة x. إذن، عدد الخيارات في هذه الحالة هو $4 \times 4 = 16$.

الحالة الثانية: xyx، $x \neq 0$. في هذه الحالة أيضاً يوجد أربعة خيارات للمرتبة x وأربعة خيارات للمرتبة y. إذن، عدد الخيارات في هذه الحالة هو $4 \times 4 = 16$.

الحالة الثالثة: xxy حيث $x \neq 0$. في هذه الحالة أيضاً يوجد أربعة خيارات للمرتبة

xوأربعة خيارات للمرتبة y. إذن، عدد الخيارات في هذه الحالة هو أيضاً $4 \times 4 = 16$. الآن، استناداً إلى مبدأ الجمع يكون عدد الأعداد الصحيحة غير السالبة المكونة من ثلاث خانات جميع خاناتها زوجية وفيها خانتان متشابهتان فقط هو

$$16 + 16 + 16 = 48$$ ◇

مثال (١٧) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من ثلاث خانات مختارة من الأرقام 0إلى 9بحيث تكون واحدة فقط من خاناتها زوجية؟

الحل

لدينا الحالات الثلاثة التالية:

الحالة الأولى: xyz، xزوجي و $x \neq 0$. عدد الخيارات في هذه الحالة هو $4 \times 5 \times 5 = 100$.

الحالة الثانية: xyz، $x \neq 0$و yزوجي. في هذه الحالة يوجد خمس خيارات للخانة yوهي $8 , 6 , 4 , 2 , 0$وخمس خيارات لكل من xو yوهي $9 , 7 , 5 , 3 , 1$. إذن عدد الخيارات في هذه الحالة هو $5 \times 5 \times 5 = 125$.

الحالة الثالثة: xyz ، $x \neq 0$ و zزوجي. هذه الحالة مشابهة للحالة الثانية و عدد خياراتها $5 \times 5 \times 5 = 125$. إذن عدد الأعداد المطلوبة هو

$$100 + 125 + 125 = 350.$$ ◇

مثال (١٨) ما عدد الكلمات من الطول 3أو 4التي يمكن اختيارها من مجموعة الرموز $\{1,2,3,4,5,A,B,C,D,E\}$بحيث تحتوي كل كلمة من هذه الكلمات على حرف واحد على الأقل؟

الحل

لنفرض أن N هو عدد الكلمات المطلوبة وأن N_3 و N_4 هي أعداد الكلمات من الأطوال 3 و 4 على التوالي. باستخدام مبدأ الجمع نجد أن $N = N_3 + N_4$. لإيجاد N_3 يكون من الأفضل إيجاد عدد الكلمات من الطول 3 بما في ذلك الكلمات التي لا تحتوي على حروف ومن ثم الطرح من هذا العدد، عدد الكلمات من الطول 3 التي لا تحتوي على حروف. وبهذا نجد استناداً إلى مبدأ الضرب أن $N_3 = 10^3 - 5^3 = 875$. وبالمثل، $N_4 = 10^4 - 5^4 = 9375$.

إذن، $N = N_3 + N_4 = 875 + 9375 = 10250$. ◇

مبدأ التضمين والإقصاء [Inclusion-Exclusion Principle]

إذا كان من الممكن إنجاز مهمتين T و S في الوقت نفسه فإننا لا نستطيع استخدام مبدأ الجمع لإيجاد عدد طرق إنجاز T أو S، لأننا بجمع العددين نكون قد جمعنا عدد طرق إنجازهما معاً مرتين. ولهذا يجب طرح هذا العدد من المجموع. يدعى مبدأ العد هذا، مبدأ التضمين والإقصاء ويمكن استخدام لغة المجموعات للتعبير عنه على النحو التالي:

إذا كانت أعداد عناصر المجموعتين A و B هي $|A|$ و $|B|$ على التوالي فإن عدد عناصر المجموعة $A \cup B$ هو

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

مثال (١٩) في أحد ملتقيات التدريب خُيِّر أعضاء الفريق السعودي للناشئين بين لعب كرة القدم و السباحة في الوقت المخصص للرياضة و قد كان عدد أعضاء الفريق 20 طالباً. فاختار 12 طالباً أن يلعبوا كرة القدم واختار 10 منهم السباحة

فإذا علمت أن 8 من الطلاب قد اختاروا النشاطين معاً فكم عدد الطلاب الذين لم يختاروا أياًمن النشاطين ؟

الحل

لاحظ أن عدد الطلاب الذين اختاروا كرة القدم 12 وعدد الذين اختاروا السباحة 10 و مجموعهما 22 ولكن عدد الطلاب الإجمالي 20 وهذا يفسر بأن هناك طلاباً قد اختاروا النشاطين معا فنحن قد حسبناهم مع المجموعة الأولى وكذلك حسبناهم مع المجموعة الثانية مرة أخرى و بالتالي لنحصل على عدد الطلاب الذين يشاركون في أحد النشاطين أو كليهما لابد أن نطرح المتكرر وهو 8 طلاب الذين اختاروا النشاطين معا لنحصل على $14 = 8 - 10 + 12$ طالباً مشاركين وبالتالي لدينا 6 طلاب لم يختاروا أياًمن النشاطين. ◇

مسائل محلولة

(١) كم عدد الأعداد الصحيحة من 17 إلى 311؟

(٢) ما هو العدد الثالث والخمسون في المتتابعة $... , 88 , 87 , 86$؟

(٣) لدينا r من الأعداد الصحيحة المتتالية. إذا كان n هو أصغر هذه الأعداد فما أكبر هذه الأعداد؟

(٤) كم عدد الأعداد الصحيحة x التي تحقق $16 > \sqrt{x} > 12$؟

(٥) كم عدد المضاعفات الموجبة للعدد 7 الأصغر من العدد 200؟

(٦) كم عدد الأعداد الصحيحة n حيث $2000 > n > 500$ والتي هي مضاعفات لكل من العددين 7 و 11 ؟

(٧) كم عدد الأعداد الصحيحة بين 10 و 500 التي باقي قسمتها على 4 يساوي 3؟

(٨) كم عدد المجموعات المكونة من أربعة أعداد صحيحة موجبة متتالية بحيث يكون حاصل ضرب أعدادها أصغر من 100000؟

(٩) كم عدد المربعات الكاملة بين العددين 313 و 160110؟

(١٠) بكم طريقة يمكن توزيع الجوائز الأولى والثانية والثالثة على فصل مكون من 25 طالباً؟

(١١) ما عدد الأعداد الصحيحة الزوجية الموجبة المكونة من أربع مراتب (خانات)؟

(١٢) كم عدد الأعداد الصحيحة x حيث $10000 > x > 1000$ التي مراتبها مأخوذة من الأعداد 0، 6، 7، 9 ؟

(١٣) بكم طريقة يمكن ترتيب حروف الكلمة VARIOUS إذا كانت حروف

العلة تتناوب مع الحروف الساكنة (حروف العلة باللغة الانجليزية هي (A,E,I,O,U؟

(١٤) ما عدد التطبيقات الأحادية (المتباينة) $f : A \to B$ حيث $\left|A\right| = m$ و $\left|B\right| = n$؟

(١٥) [Aust.MC 1981] يبيع متجر مكعبات خشبية مرقمة بالأرقام $0,1,2,\ldots,9$ لتكوين أرقام المنازل المكونة من ثلاث مراتب فقط. باع المتجر جميع المكعبات و لم يتبق لديه إلا مكعبات مرقمة بالأرقام 4 ، 7 ، 8 . ما عدد أرقام المنازل التي يمكن تكوينها من هذه المراتب؟

(١٦) [Aust.MC 1981] في أحد الاحتفالات تمت 28 مصافحة بين الحاضرين. كل من الحاضرين صافح جميع الآخرين مرة واحدة فقط. ما عدد الحاضرين في هذا الحفل؟

(١٧) [Aust.MC 1979] في دوري التنس، فقط اللاعب الذي يكسب مباراة سيلعب مباراة أخرى وهكذا إلى أن يتحدد المركز الأول. إذا كان عدد اللاعبين في الدورة هو 128 فما عدد المباريات اللازمة لتحديد المركز الأول؟

(١٨) [Aust.MC 1979] استخدمت 852 مرتبة (خانة) لترقيم صفحات كتاب ابتداءً من الصفحة الأولى. ما عدد صفحات الكتاب؟

(١٩) [Math counts 1985] ما عدد الطرق المختلفة التي يستطيع بها طالب أن يخمن إجابات خمسة أسئلة، الإجابة عن كل منها صائب أو خاطئ؟

(٢٠) [Math counts 1984] ما عدد قواسم العدد 2^{95} الأكبر من 10^6؟

(٢١) [Mandelbrot#3] نقول إن العدد متناظر إذا تطابقت قراءته من اليمين إلى

اليسار مع قراءته من اليسار إلى اليمين [العدد 3443 متناظر]. ما عدد الأعداد المتناظرة المكونة من 4 مراتب؟

(٢٢) [Gauss 2011] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من 400 التي يمكن الحصول عليها باستخدام المرتبة 1 أو 2 أو 3 فقط؟

(٢٣) [Gauss 2009] كم عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها كتابة 101 كمجموع عددين صحيحين موجبين بحيث يكون العدد الثاني أكبر من العدد الأول؟

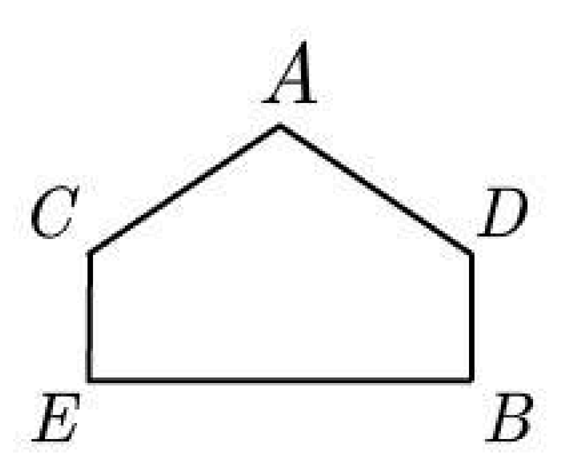
(٢٤) [Gauss 2009] فصل مكون من 40 طالباً، 18 طالباً يفضلون فطيرة التفاح و 15 طالباً يفضلون فطيرة الكرز و 12 طالباً لا يفضلون أياً منهما. ما عدد طلاب الفصل الذين يفضلون كليهما؟

(٢٥) كم عدد الكلمات الثنائية (تستخدم المرتبتين 0 و 1) من الطول 6 التي تبدأ بالمرتبة 1 أو تنتهي بالمرتبتين 00؟

(٢٦) [AMC10B 2012] يقدم أحد المطاعم مع وجبة غداء اليوم نوعاً واحداً من الحلوى يختاره طباخ المطبخ من بين الأنواع: الجاتو، فطيرة التفاح، الآيس كريم، المهلبية على شرط أن يقدم نوعاً واحداً فقط من الحلوى كل يوم من أيام الأسبوع وأن لا يقدم نوعاً واحداً من الحلوى في يومين متتالين وأن يكون نوع الحلوى المقدم يوم الجمعة هو الجاتو. ما عدد الخيارات الممكنة للحلوى على قائمة طعام الأسبوع؟

(٢٧) [AMC10A 2011] كم عدد الأعداد الصحيحة الزوجية بين العددين 200 و 700 بحيث تكون مراتبها مختلفة ومأخوذة من المراتب $1, 2, 5, 7, 8, 9$؟

(٢٨) [AMC10A 2011] لدينا الخماسي $ADBEC$ المبين في الشكل المرفق



لونا كلاً من الرؤوس بلون من 6ألوان متوافرة بحيث يُلوَّن طرفا كل من الأقطار بلونين مختلفين. كم عدد التلوينات الممكنة للخماسي؟

(٢٩) [AMC10A 2010] وزعنا 7 حبات حلوى على ثلاثة أكياس: أحمر وأزرق وأبيض. إذا اشترطنا أن نضع في كل من الكيسين الأحمر والأزرق حبة واحدة على الأقل أما الكيس الأبيض فيمكن أن يكون فارغاً فما عدد الطرق الممكنة لتوزيع حبات الحلوى على الأكياس الثلاثة؟

(٣٠) [AMC10A 2008] ملأنا مثلثاً متساوي الأضلاع طول ضلعه 10سم بمثلثات متساوية الأضلاع طول ضلع كل منها يساوي 1سم. كم عدد المثلثات الصغيرة التي نحتاج إليها لإنجاز ذلك؟

(٣١) [AHMSE 1998] نقول إن رقم الهاتف المكون من سبعة أرقام $d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7$ مميز إذا كان $d_1d_2d_3 = d_4d_5d_6$ أو $d_1d_2d_3 = d_5d_6d_7$ أو كلاهما حيث $d_i \in \{0,1,2,\dots,9\}$. ما عدد أرقام الهواتف المميزة؟

(٣٢) [AIME 1993] كم عدد الأعداد الصحيحة الزوجية x حيث $4000 \le x < 7000$ والتي جميع مراتبها مختلفة؟

(٣٣) تتكون لوحات السيارات في المملكة من ثلاثة حروف من حروف اللغة العربية (عدد حروفها 28) متبوعة بأربعة أرقام مأخوذة من الأرقام $0,1,2,\dots,9$. ما عدد اللوحات التي يمكن تكوينها بحيث لا تحتوي على الحرف ج والعدد 0 معاً؟

(٣٤) [PACAT]قطعنا رقعة 6×6 من رقعة شطرنج 8×8. بكم طريقة يمكن وضع قطعتي نقود متماثلتين واحدة على مربع أسود والأخرى على مربع أبيض من مربعات الرقعة بشرط أن لا يقعا معاً على الصف أو العمود نفسه؟

(٣٥) [PACAT]كتبنا الأعداد من 1 إلى 1000. كم عدد مرات ظهور المرتبة 7 في قائمة هذه الأعداد؟

(٣٦) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من 3 مراتب التي مجموع مراتبها عدد زوجي؟

(٣٧) أعطيت 1000 ريـــال وطلب منك شراء مائة من الأقلام والمساطر والمماحي بكامل المبلغ. إذا كان ثمن القلم الواحد 20 ريالاً وثمن المسطرة الواحدة 5 ريالات وثمن الممحاة الواحدة ريالاً واحداً فكم عدد الطرق الممكنة لشراء هذه الأغراض؟

(٣٨) كم عدد القواسم الفردية للعدد $2^7 \times 3^4 \times 7^3$؟

(٣٩) كم عدد الأعداد المكونة من 4 مراتب و لا تزيد عن 5000 والتي مراتبها مأخوذة من المراتب $\{0,1,2,3,4,5\}$؟

(٤٠) [PACAT]لدينا 6 صناديق مرقمة بالأرقام $1,2,3,4,5,6$. نريد أن نضع في كل منها كرة خضراء أو كرة حمراء بشرط أن نضع كرة خضراء في صندوق واحد على الأقل وأن الصناديق التي سنضع فيها كرات خضراء يجب أن تكون أرقامها متتالية. ما عدد الطرق الممكنة لعمل ذلك؟

حلول المسائل

(١) كم عدد الأعداد الصحيحة من 17 إلى 311؟

الحل

عدد هذه الأعداد هو $(311 - 17) + 1 = 295$.

(٢) ما العدد الثالث والخمسون في المتتابعة $86\,,\,87\,,\,88\,,\,\ldots$؟

الحل

إذا فرضنا أن x هو العدد الثالث والخمسون في المتتابعة $86\,,\,87\,,\,88\,,\,\ldots\,,\,x$ فنحصل بطرح العدد 85 من كل من حدود المتتابعة على المتتابعة

$$1\,,\,2\,,\,3\,,\,\ldots\,,\,x-85$$

من ذلك نجد أن $x - 85 = 53$. وبهذا فإن $x = 85 + 53 = 138$.

(٣) لدينا r من الأعداد الصحيحة المتتالية. إذا كان n هو أصغر هذه الأعداد فما أكبر هذه الأعداد؟

الحل

لنفرض أن x هو أكبر هذه الأعداد. عندئذ، لدينا

$$n\,,\,n+1\,,\,n+2\,,\,\ldots\,,\,x$$

هذه متتابعة من الأعداد المتتالية عدد عناصرها r. بطرح $n-1$ من كل من حدود هذه المتتابعة نحصل على

$$1\,,\,2\,,\,3\,,\,\ldots\,,\,x-n+1$$

إذن، $x - n + 1 = r$. وبهذا فإن $x = n + r - 1$.

(٤) كم عدد الأعداد الصحيحة x التي تحقق $12 < \sqrt{x} < 16$؟

الحل

هذا يكافئ إيجاد عدد الأعداد الصحيحة x التي تحقق $144 = 12^2 < x < 16^2 = 256$. عدد هذه الأعداد هو $(256 - 144) - 1 = 111$.

(٥) كم عدد المضاعفات الموجبة للعدد 7 التي أصغر من العدد 200؟

الحل

الأعداد المطلوبة هي $196, \ldots, 21, 14, 7$. بقسمة كل حد من حدود المتتابعة على العدد 7 نحصل على المتتابعة $28, \ldots, 3, 2, 1$. وبهذا فعدد هذه الأعداد هو 28.

(٦) كم عدد الأعداد الصحيحة n حيث $500 < n < 2000$ والتي هي مضاعفات لكل من العددين 7 و 11 ؟

الحل

لاحظ أن مضاعفات العددين 7 و 11 هي مضاعفات العدد 77. عدد الأعداد التي أصغر من أو تساوي 500 ومضاعفة للعدد 77 يساوي $6 = \left\lfloor \frac{500}{77} \right\rfloor$. وعدد الأعداد التي أصغر من أو تساوي 2000 ومضاعفة للعدد 77 يساوي $25 = \left\lfloor \frac{2000}{77} \right\rfloor$. إذن، عدد الأعداد الصحيحة n حيث $500 < n < 2000$ ومضاعفة للعدد 77 يساوي $19 = 6 - 25$.

(٧) كم عدد الأعداد الصحيحة بين 10 و 500 التي باقي قسمتها على 4 يساوي 3؟

الحل

أولا نلاحظ أنه إذا كان باقي قسمة العدد الصحيح x على 4 يساوي 3 فإن باقي قسمة $x-3$ على 4 يساوي صفراً، أي أن $x-3$ من مضاعفات 4. لذا، فإننا نطرح 3 من جميع الأعداد في القائمة المعطاة وسنحصل على الأعداد من 7 إلى 497. أول عدد منها يقبل القسمة على 4 هو 8 وآخر عدد هو 496. الآن نأخذ جميع مضاعفات 4 من القائمة الأخيرة، أي الأعداد بين 8 و 496 ونقسمها على 4 فنحصل على الأعداد المتتالية من 2 إلى 124 ولكن عدد هذه الأعداد هو نفس العدد المطلوب ويساوي 123 وذلك باستخدام مبدأ العد بالتقابل.

(٨) كم عدد المجموعات المكونة من أربعة أعداد صحيحة موجبة متتالية بحيث يكون حاصل ضرب أعدادها أصغر من 100000؟

الحل

بملاحظة أن $16\times17\times18\times19=93024$ وأن $17\times18\times19\times20=116280$.

نجد أن المجموعة $\{16,17,18,19\}$ هي أكبر المجموعات التي تحقق المطلوب. ولذا فإن المجموعات التي تحقق المطلوب هي

$$\{1,2,3,4\}\ ,\ \{2,3,4,5\}\ ,\ \dots\ ,\ \{16,17,18,19\}$$

وعددها 16 مجموعة.

(٩) كم عدد المربعات الكاملة بين العددين 313 و 160110؟

الحل

بما أن $17^2=289$ و $18^2=324$ فإن أصغر هذه المربعات هو 18^2. وبما أن $400^2=160000$ وأن $401^2=160801$ فإن أكبر هذه المربعات هو 401^2. ولذا يكون المطلوب هو عدد الأعداد x حيث $18\le x\le 400$ وهذا العدد هو

$(400 - 18) + 1 = 383$.

(١٠) بكم طريقة يمكن توزيع الجوائز الأولى والثانية والثالثة على فصل مكون من 25 طالباً؟

الحل

يمكن اختيار أي من طلاب الفصللأخذ الجائزة الأولى وبعد ذلك يمكن إعطاء الجائزة الثانية لأي من ال 24 طالباً المتبقي والجائزة الثالثة لأي من 23 طالباً. إذن، استناداً إلى مبدأ الضرب يكون عدد الطرق هو

$$25 \times 24 \times 23 = 13800.$$

(١١) ما عددالأعدادالصحيحةالزوجية الموجبة المكونة منأربعمراتب(خانات)؟

الحل

هذه الأعداد هي $ABCD$ حيث $A \in \{1,2,3,\ldots,9\}$ ، $B,C \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ ، $D \in \{0,2,4,6,8\}$. إذن، استناداً إلى مبدأ الضرب يكون العدد المطلوب هو $9 \times 10 \times 10 \times 5 = 4500$.

(١٢) كم عدد الأعداد الصحيحة x حيث $1000 < x < 10000$ التي مراتبها مأخوذة من المراتب 0، 6، 7، 9 ؟

الحل

هذه الأعداد مكونة من أربع مراتب $ABCD$ حيث $A \neq 0$. إذن، عدد خيارات A يساوي 3 وعدد خيارات كل من B ، C ، D يساوي 4 . وبهذا فالعدد المطلوب هو $3 \times 4 \times 4 \times 4 = 192$.

(١٣) بكم طريقة يمكن ترتيب حروف الكلمة VARIOUSإذا كانت حروف العلة تتناوب مع الحروف الساكنة (حروف العلة باللغة الانجليزية هي (A,E,I,O,U؟

الحل

الكلمة مكونة من 7حروف، منها 4 حروف علة وهي A,I,O,U وثلاثة حروف ساكنة هي V,R,S. وبما أن عدد حروف العلة أكبر عدداًمن الحروف الساكنة فيجب أن تبدأ وتنتهي الكلمة بحرف علة. إذن، استناداً إلى مبدأ الضرب عدد الطرق الممكنة لترتيب الحروف هو $144 = 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 4$.

(١٤) ما عدد التطبيقات الأحادية (المتباينة) $f : A \to B$ حيث $\left|A\right| = m$ و $\left|B\right| = n$؟

الحل

لاحظ أولاً أنه إذا كان $m > n$ فإنه لا يمكن إيجاد تطبيق أحادي من A إلى B . ولذا فإن العدد المطلوب هو 0 . وعندما $m \le n$ ، لنفرض أن $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. يوجد n من الخيارات لاختيار صورة العنصر a_1 . وبما أن التطبيق أحادي فيوجد $n - 1$ من الخيارات لصورة a_2 . أما صورة العنصر a_3 فعدد خياراتها يساوي $n - 2$ وهكذا. إذن، استناداً إلى مبدأ الضرب، عدد التطبيقات الأحادية هو

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-m+1) .$$

(١٥) [Aust.MC 1981] يبيع متجر مكعبات خشبية مرقمة بالأرقام $0,1,2,\ldots,9$ لتكوين أرقام المنازل المكونة من ثلاث مراتب فقط. باع المتجر جميع المكعبات و لم يتبق لديه إلا مكعبات مرقمة بالأرقام 4 ، 7، 8 . ما عدد أرقام المنازل التي يمكن تكوينها من هذه المراتب؟

الحل

أرقام المنازل هي أعداد ABC مكونة من ثلاث مراتب كل منها مأخوذ من المراتب 4 ، 7 ، 8 . ولذا يوجد 3 خيارات لكل منها. إذن، عدد أرقام المنازل هو $3 \times 3 \times 3 = 27$.

(١٦) [Aust.MC 1981] في أحد الاحتفالات تمت 28 مصافحة بين الحاضرين. كل من الحاضرين صافحجميع الحاضرين الآخرين مرة واحدة فقط. ما عدد الحاضرين في هذا الحفل؟

الحل

لنفرض أن عدد الحاضرين هو n . كل من هؤلاء صافح $n-1$ شخصاً. وبما أن المصافحة تتطلب شخصين فإن عدد المصافحات هو $\frac{n(n-1)}{2}$. إذن، $\frac{n(n-1)}{2} = 28$. أي أن $n(n-1) = 56$. من ذلك نرى أن

$$n^2 - n - 56 = 0$$
$$(n+7)(n-8) = 0$$

إذن $n = 8$ أو $n = -7$.وبما أن n عدد صحيح موجب فإن $n = 8$.

(١٧) [Aust.MC 1979] في دوري التنس، فقط اللاعب الذي يكسب مباراة سيلعب مباراة أخرى وهكذا إلى أن يتحدد المركز الأول. إذا كان عدد اللاعبين في الدورة هو 128 فما عدد المباريات اللازمة لتحديد المركز الأول؟

الحل

كل من اللاعبين عدا اللاعب الذي سيحصل على المركز الأول يخسر مباراة واحدة فقط. ولذا عدد المباريات يساوي 127.

(١٨) [Aust.MC 1979] استخدمت 852 مرتبة (خانة) لترقيم صفحات كتاب ابتداءً من الصفحة الأولى. ما عدد صفحات الكتاب؟

الحل

لترقيم الصفحات من 1 إلى 9 نحتاج إلى 9 مراتب. لترقيم الصفحات من 10 إلى 99 نحتاج إلى $2 \times 90 = 180$ مرتبة. عدد المراتب المتبقية لترقيم صفحات الكتاب من 100 فصاعداً هو $852 - 180 - 9 = 663$. إذن، عدد الصفحات المرقمة 100 فصاعداً هو $663 \div 3 = 221$ صفحة. وبهذا يكون عدد صفحات الكتاب هو $9 + 180 + 221 = 320$.

(١٩) [Math counts 1985] ما عدد الطرق المختلفة التي يستطيع بها طالب أن يخمن إجابات خمسة أسئلة، الإجابة عن كل منها صائب أو خاطئ؟

الحل

لإجابة كل سؤال من الخمسة أسئلة يوجد خياران. إذن، عدد طرق تخمين إجابات خمسة أسئلة هو $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.

(٢٠) [Math counts 1984] ما عدد قواسم العدد 2^{95} الأكبر من 10^6؟

الحل

سنجد عدد قواسم العدد 2^{95} الأصغر من 10^6 ونطرحها من عدد قواسم العدد 2^{95}. الآن، جميع قواسم العدد 2^{95} هي

$$1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{95}$$

وعددها 96. ولإيجاد عدد القواسم الأصغر من 10^6 نجد أكبر هذه القواسم. بملاحظة أن $2^{10} = 1024 > 10^3$ فإن $2^{20} > 10^6$. ولكن $2^{19} < 10^6$.

إذن، قواسم العدد 2^{95} الأصغر من 10^6 هي $1, 2, 2^2, \dots, 2^{19}$ وعددها 20. وبهذا يكون عدد القواسم التي أكبر من 10^6 هو $96 - 20 = 76$.

(٢١) [Mandelbrot #3] نقول إن العدد متناظر إذا تطابقت قراءته من اليمين إلى اليسار مع قراءته من اليسار إلى اليمين[العدد 3443 متناظر]. ما عدد الأعداد المتناظرة المكونة من 4 مراتب؟

الحل الأول

أفضل طريقة لحل هذه المسألة هو سرد الأعداد المتناظرة. يوجد عشرة أعداد متناظرة تبدأ بالمرتبة 1 وهي

$$1001, 1111, 1221, 1331, 1441, 1551, 1661, 1771, 1881, 1991.$$

وبالمثل، يوجد عشرة أعداد متناظرة تبدأ بكل من المراتب 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9. إذن، عدد الأعداد المتناظرة هو $10 \times 9 = 90$.

الحل الثاني

الأعداد المتناظرة المكونة من 4 مراتب تكون على الصورة $ABBA$ حيث $A \in \{1, 2, \dots, 9\}$ و $B \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. وبالتالي نجد من مبدأ الضرب أن عدد

هذه الأعداد يساوي $90 = 10 \times 9$.

(٢٢) [Gauss 2011] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من 400 التي يمكن الحصول عليها باستخدام المرتبة 1أو 2أو 3فقط؟

الحل

عدد الأعداد المكونة من خانة واحدة يساوي 3 (1أو 2أو 3).

الأعداد المكونة من خانتين هي AB حيث $A, B \in \{1,2,3\}$ وعددها يساوي $9 = 3 \times 3$. الأعداد المكونة من ثلاث خانات هي ABC حيث $A, B, C \in \{1,2,3\}$ وعددها $27 = 3 \times 3 \times 3$. إذن، عدد الأعداد المطلوب هو

$$3 + 9 + 27 = 39$$

وجميع هذه الأعداد أصغر من 400.

(٢٣) [Gauss 2009] كم عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها كتابة 101 كمجموع عددين صحيحين موجبين بحيث يكون العدد الثاني أكبر من العدد الأول؟

الحل

هذه الأعداد هي $1 + 100$ ، $2 + 99$ ، $3 + 98$ ، ⋯، $50 + 51$. وعددها 50.

(٢٤) [Gauss 2009] فصل مكون من 40 طالباً، 18طالباً يفضلون فطيرة التفاح و 15طالباً يفضلون فطيرة الكرز و 12طالباً لا يفضلون أياً منهما. ما عدد طلاب الفصل الذين يفضلون كليهما؟

الحل

لنفرض أن A و B هما مجموعتا الطلاب الذين يفضلون فطيرة التفاح وفطيرة الكرز على التوالي. المطلوب إيجاد $|A \cap B|$. باستخدام مبدأ التضمين والإقصاء لدينا

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

ولكن $|A| = 18$، $|B| = 15$. وبما أن عدد طلاب الفصل هو 40 وأن 12 منهم لا يفضلون أي من الفطيرتين فإن $40 - 12 = 28$ يفضلون على الأقل إحدى الفطيرتين. أي أن $|A \cup B| = 28$. إذن،

$28 = 18 + 15 - |A \cap B|$. أي أن $|A \cap B| = 33 - 28 = 5$.

وبهذا يوجد 5 طلاب يفضلون كلا الفطيرتين.

(٢٥) كم عدد الكلمات الثنائية (تستخدم المرتبتين 0 و 1) من الطول 6 التي تبدأ بالمرتبة 1 أو تنتهي بالمرتبتين 00؟

الحل

لنفرض أن N هي مجموعة الكلمات التي تبدأ بالمرتبة 1 وأن M هي مجموعة الكلمات التي تنتهي بالمرتبتين 00. عندئذ، استناداً إلى مبدأ الضرب نجد أن

$$|N| = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$
$$|M| = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 2^4$$
$$|M \cap N| = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 2^3$$

إذن، المطلوب هو $|M \cup N|$ ويمكن الحصول على هذا العدد باستخدام مبدأ التضمين والإقصاء

$$|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N| = 2^5 + 2^4 - 2^3 = 40.$$

(٢٦) [AMC10B 2012]يقدم أحد المطاعم مع وجبة غداء اليوم نوعاً واحداً من الحلوى يختاره طباخ المطبخ من بين الأنواع: الجاتو، فطيرة التفاح،الآيس كريم، المهلبية على شرط أن يقدم نوعاً واحداً فقط من الحلوى كل يوم من أيام الأسبوع وأن لا يقدم نوعاً واحداً من الحلوى في يومين متتالين وأن يكون نوع الحلوى المقدم يوم الجمعة هو الجاتو. ما عدد الخيارات الممكنة للحلوى على قائمة طعام الأسبوع؟

الحل

بداية يوجد خيار واحد يوم الجمعة وهو الجاتو. ولذا يمكن اختيار نوع حلوى يوم السبت بثلاث طرق (فطيرة التفاح أو الآيس كريم أو المهلبية). أيضاً يمكن اختيار نوع حلوى الأحد من بين ثلاثة أنواع (الجاتو والنوعان اللذان لم يتم اختيارهما يوم السبت) وهكذا لبقية أيام الأسبوع. إذن، عدد الخيارات هو

$1 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729$.

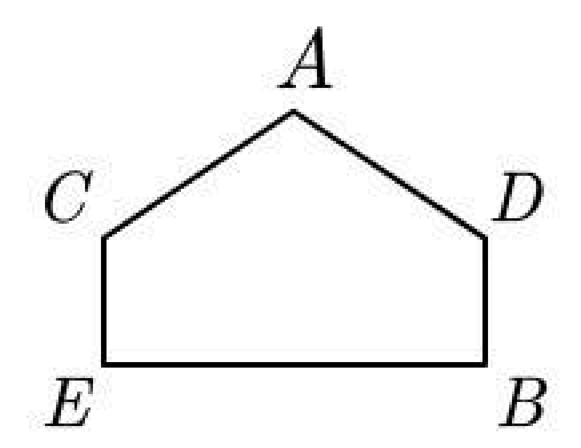
(٢٧) [AMC10A 2011] كم عدد الأعداد الصحيحة الزوجية بين العددين 200و 700 بحيث تكون مراتبها مختلفة ومأخوذة من المراتب $1, 2, 5, 7, 8, 9$؟

الحل

مرتبة المئات إما أن تكون 2أو 5 (لماذا ؟). إذا كانت مرتبة المئات هي 2فإن مرتبة الآحاد يجب أن تكون 8 (لأن العدد زوجي). ولذا يوجد 4خيارات لمرتبة العشرات وهي 1أو 5أو 7أو9. إذن، عدد أعداد هذه الحالة هو $1 \times 4 \times 1 = 4$. أما إذا كانت مرتبة المئات هي 5فيوجد خياران لمرتبة الآحاد هما 2أو 8وبعد اختيار مرتبة الآحاد يتبقى أربعة خيارات لمرتبة العشرات. إذن،

عدد أعداد هذه الحالة هو $1 \times 4 \times 2 = 8$. ويكون العدد الكلي لهذه الأعداد هو $4 + 8 = 12$.

(٢٨) [AMC10A 2011] لدينا الخماسي $ADBEC$ المبين في الشكل المرفق



لونا كلاً من الرؤوس بلون من 6 ألوان متوافرة بحيث يُلوَّن طرفا كل من الأقطار بلونين مختلفين. كم عدد التلوينات الممكنة للخماسي؟

الحل

ندرس الحالات الثلاث الممكنة.

الحالة الأولى: الرأسان C و A لهما اللون نفسه والرأسان A و D لهما لونان مختلفان. في هذه الحالة لون الرأس E يجب أن يكون مختلفاً عن لون كل من الرأسين A و D. ولذا فعدد خيارات A هو 6 وعدد خيارات B هو 5 (أي لون مختلف عن A)، عدد خيارات C هو 1 وعدد خيارات D هو 5 وعدد خيارات E هو 4. ونحصل في هذه الحالة على تلوينات عددها $6 \times 5 \times 1 \times 5 \times 4 = 600$.

الحالة الثانية: لون الرأس C مختلف عن لون الرأس A ولون الرأس D مختلف عن لون الرأس A. في هذه الحالة، عدد خيارات A هو 6 وعدد خيارات B هو 5 وعدد خيارات C هو 4 (لأن A و B يجب أن يكون لهما لونان مختلفان) وعدد خيارات D هو 4 وعدد خيارات E هو 4 أيضاً. ونحصل في هذه الحالة على تلوينات عددها $6 \times 5 \times 4 \times 4 \times 4 = 1920$.

الحالة الثالثة: الرأسان A و C لهما لونان مختلفان والرأسان A و D لهما اللون

نفسه. في هذه الحالة يوجد 6 خيارات للرأس A و 5 خيارات للرأس B و 4 خيارات للرأس C وخيار واحد للرأس D و 5 خيارات للرأس E ونحصل في هذه الحالة على تلوينات عددها $600 = 5 \times 1 \times 4 \times 5 \times 6$.

إذن، عدد التلوينات الممكنة هو $3120 = 600 + 1920 + 600$.

(٢٩) [AMC10A 2010] وزعنا 7 حبات حلوى على ثلاثة أكياس: أحمر وأزرق وأبيض. إذا اشترطنا أن نضع في كل من الكيسين الأحمر والأزرق حبة واحدة على الأقل أما الكيس الأبيض فيمكن أن يكون فارغاً فما عدد الطرق الممكنة لتوزيع حبات الحلوى على الأكياس الثلاثة؟

الحل

نجد أولاً عدد طرق توزيع 7 حبات حلوى على ثلاثة أكياس دون شروط. لكل حبة من حبات الحلوى ثلاثة خيارات. إذن، عدد الطرق الممكنة هو $3^7 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$.

الآن، لنفرض الآن أن R و B مجموعتا الطرق عندما يكون الكيسان الأحمر والأزرق فارغين على التوالي. سنجد الآن عدد الطرق التي يكون فيها الكيس الأحمر فارغاً أو الكيس الأزرق فارغاً. أي $\left|R \cup B\right|$. استناداً إلى مبدأ التضمين والإقصاء هذا العدد هو

$$\left|R \cup B\right| = \left|R\right| + \left|B\right| - \left|R \cap B\right| = 2^7 + 2^7 - 1 = 2^8 - 1$$

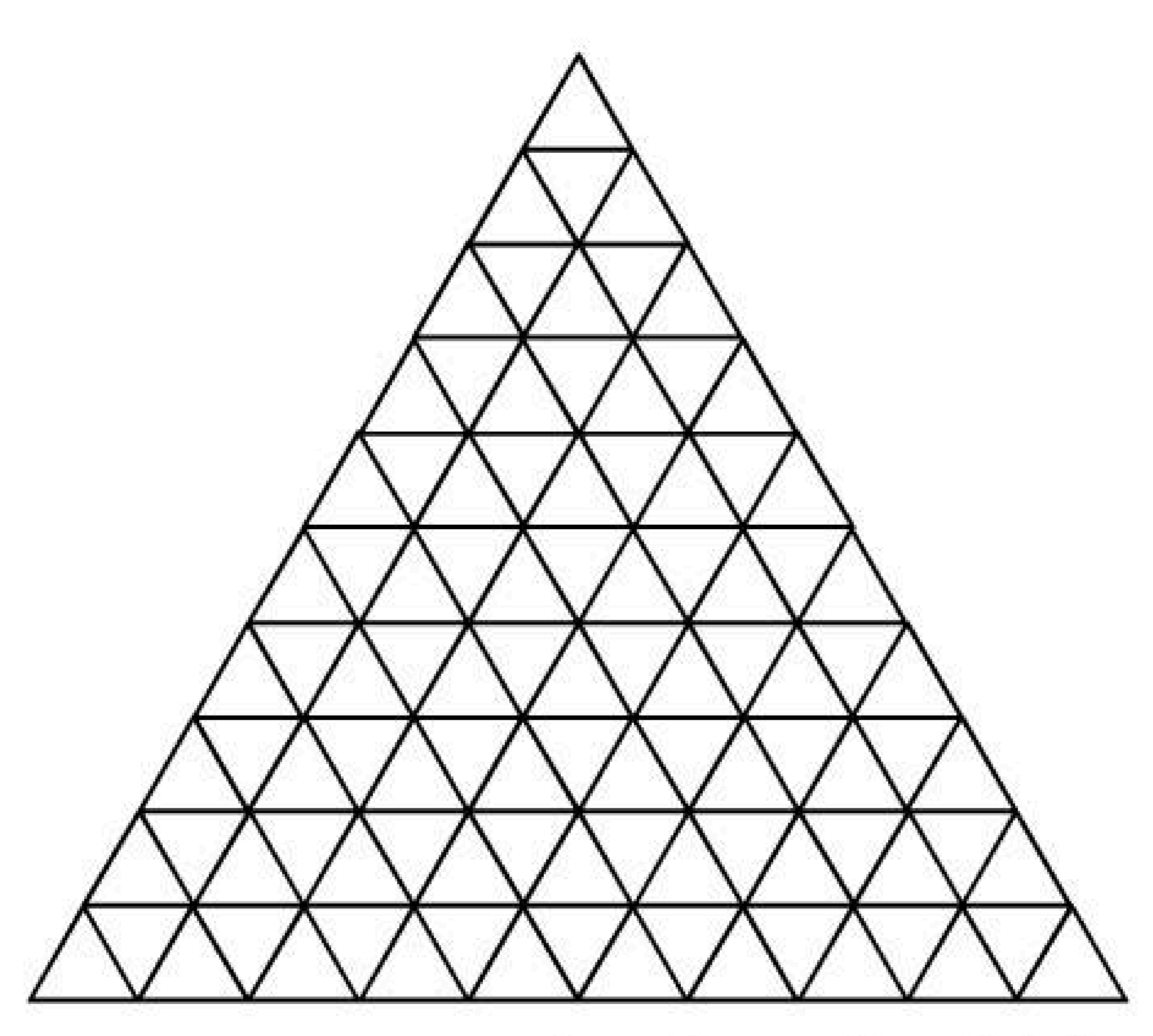
إذن، عدد التوزيعات المطلوبة هو $3^7 - (2^8 - 1) = 2187 - 256 + 1 = 1932$

.

(٣٠) [AMC10A 2008] ملأنا مثلثاً متساوي الأضلاع طول ضلعه 10سم بمثلثات متساوية الأضلاع طول ضلع كل منها يساوي 1سم. كم عدد

المثلثات الصغيرة التي نحتاج إليها لإنجاز ذلك ؟

الحل الأول



من الرسم المرفق عدد المثلثات الصغيرة يساوي

$$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=100$$

الحل الثاني

كل من المثلثات الصغيرة يشابه المثلث الكبير. ولهذا فالنسبة بين مساحتيهما تساوي النسبة بين مربعي ضلعيهما. إذن، هذه النسبة هي $\frac{1}{100}=\frac{1^2}{10^2}$.

ومن ثم فعدد المثلثات الصغيرة يساوي 100.

(٣١) [AHMSE 1998] نقول إن رقم الهاتف المكون من سبعة أرقام $d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7$ مميز إذا كان $d_1d_2d_3=d_4d_5d_6$ أو $d_1d_2d_3=d_5d_6d_7$ أو كلاهما حيث $d_i\in\{0,1,2,\ldots,9\}$. ما عدد أرقام الهواتف المميزة؟

الحل

لنفرض أن A هي مجموعة الهواتف حيث $d_1d_2d_3=d_4d_5d_6$ وأن B هي مجموعة الهواتف حيث $d_1d_2d_3=d_5d_6d_7$. إذن، المطلوب هو إيجاد $|A\cup B|$. ولكن

استناداً إلى مبدأ التضمين والإقصاء نعلم أن

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

الآن، بما أن $d_1d_2d_3 = d_4d_5d_6$ فإن عدد هذه الخيارات هو $10 \times 10 \times 10$ ويوجد 10 خيارات للمرتبة d_7 إذن، $|A| = 10^4$. وبالمثل، $|B| = 10^4$. كما أن $|A \cap B| = 10$ لأن هذه المجموعة تحتوي على الهواتف التي يكون فيها $d_1 = d_2 = \cdots = d_7$. إذن، عدد الهواتف المميزة هو

$|A \cup B| = 10^4 + 10^4 - 10 = 19990$.

(٣٢) [AIME 1993] كم عدد الأعداد الصحيحة الزوجية x حيث $4000 \le x < 7000$ والتي جميع مراتبها مختلفة؟

الحل

هذه الأعداد مكونة من أربع مراتب $ABCD$ حيث $A = 4$ أو $A = 5$ أو $A = 6$.

إذا كانت $A = 4$ فيوجد 4 طرق لاختيار D ($D = 0$ أو $D = 2$ أو $D = 6$ أو $D = 8$) وبعد ذلك يبقى 8 طرق لاختيار B و 7 طرق لاختيار C. إذن، عدد طرق هذه الحالة هو $1 \times 4 \times 8 \times 7$.

إذا كانت $A = 5$ فنجد بصورة مشابهة أن عدد الطرق هو $1 \times 5 \times 8 \times 7$.

وأخيراً إذا كانت $A = 6$ فعدد الطرق هو $1 \times 4 \times 8 \times 7$.

إذن، العدد الكلي للأعداد هو

$1 \times 4 \times 8 \times 7 + 1 \times 5 \times 8 \times 7 + 1 \times 4 \times 8 \times 7 = 728$.

(٣٣) تتكون لوحات السيارات في المملكة من ثلاثة حروف من حروف اللغة العربية (عدد حروفها 28) متبوعة بأربعة أرقام مأخوذة من الأرقام $0,1,2,\ldots,9$. ما عدد اللوحات التي يمكن تكوينها بحيث لا تحتوي على الحرف ج والعدد 0 معاً؟

الحل

عدد جميع اللوحات هو $28^3 \times 10^4$.

عدد الكلمات المكونة من ثلاثة حروف و لا تحتوي الحرف ج هو 27^3. إذن، عدد الكلمات المكونة من ثلاثة حروف وتحتوي الحرف ج هو $28^3 - 27^3$.

وبالمثل، عدد الأعداد المكونة من أربعة مراتب وتحتوي العدد 0 هو $10^4 - 9^4$.

وبهذا يكون عدد اللوحات التي تحتوي الحرف ج والعدد 0 هو $(28^3 - 27^3)(10^4 - 9^4)$. إذن، عدد اللوحات التي لا تحتوي كليهما هو

$$10^4 \times 28^3 - (28^3 - 27^3) \times (10^4 - 9^4) = 211716909 .$$

(٣٤) [PACAT] قطعنا رقعة 6×6 من رقعة شطرنج 8×8. بكم طريقة يمكن وضع قطعتي نقود متماثلتين واحدة على مربع أسود والأخرى على مربع أبيض من مربعات الرقعة بشرط أن لا يقعا معاً على الصف أو العمود نفسه؟

الحل

لاحظ أن الرقعة 6×6 تتكون من 6 صفوف و 6 أعمدة كل من صفوفها وكل من أعمدتها يتكون من 3 مربعات بيض و 3 مربعات سود وهذه المربعات متناوبة. وبهذا فعدد المربعات ذات اللون الأبيض يساوي عدد المربعات ذات اللون الأسود

وكل منها يساوي 18مربعاً. الآن، لكل مربع أسود نختاره لوضع قطعة نقود فإننا لا نستطيع وضع القطعة الأخرى على أي مربع أبيض في الصف أو العمود الذي يحويه. وبما أن عدد المربعات البيض في صف هذا المربع هو 3وكذلك عدد المربعات البيض في عمود هذا المربع هو 3أيضاًفإننا نستطيع اختيار أي من $18 - 6 = 12$مربعاً أبيض لنضع عليه قطعة النقود الأخرى لكل مربع أسود نختاره. وبما أن عدد المربعات ذات اللون الأسود هو 18فيكون العدد المطلوب هو $18 \times 12 = 216$.

(٣٥) [PACAT]كتبنا الأعداد من 1إلى 1000. كم عدد مرات ظهور المرتبة 7في قائمة هذه الأعداد؟

الحل

بما أن المرتبة 7لا تظهر في العدد 1000 فيكون المطلوب هو عدد مرات ظهور المرتبة 7 في قائمة الأعداد من 1 إلى 999. هذه الأعداد على الصورة ABC حيث $A, B, C \in \{0,1,2,\ldots,9\}$.لدينا الحالات الثلاث التالية:

(أ) الأعداد التي تظهر فيها المرتبة 7مرة واحدة فقط، مثل، 7، 17، 78، 217، 743وهكذا. أي أن واحدة فقط من المراتب A، B، Cتساوي 7 والمرتبتان الأخريان نختارهما من بين المراتب التسع الأخرى بعدد من الطرق يساوي $9 \times 9 = 81$. ولكن يمكن أن تكون المرتبة 7 أياً من المراتب Aأو Bأو C. إذن، عدد طرق هذه الحالة هو $3 \times 81 = 243$.

(ب) الأعداد التي تظهر فيها المرتبة 7مرتين. في هذه الحالة مرتبة واحدة من العدد لا تساوي 7 نختارها بعدد من الطرق يساوي 9. وبما أن المرتبة التي لا تساوي 7يمكن أن تكون Aأو Bأو Cفإن عدد الطرق هو

$27 = 9 \times 3$. ولكن في كل من هذه الأعداد عدد مرات ظهور المرتبة 7 يساوي 2. إذن، عدد مرات ظهور المرتبة 7 في هذه الأعداد هو $2 \times 27 = 54$.

(ت) الأعداد التي تظهر فيها المرتبة 7 ثلاث مرات. هناك عدد واحد فقط هو 777.

إذن العدد الكلي لمرات ظهور المرتبة 7 في قائمة الأعداد من 1 إلى 1000 هو

$$243 + 54 + 3 = 300.$$

(٣٦) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من 3 مراتب التي مجموع مراتبها عدد زوجي؟

الحل

العدد الموجب المكون من ثلاث مراتب هو على الصورة ABC حيث $A \neq 0$. إذن، عدد هذه الأعداد هو $900 = 10 \times 10 \times 9$. نصف هذه الأعداد مجموع مراتب كل منها زوجي والنصف الآخر مجموع مراتب كل منها فردي. إذن، العدد المطلوب هو $450 = \frac{900}{2}$.

(٣٧) أعطيت 1000 ريـــال وطلب منك شراء مائة من الأقلام والمساطر والمماحي بكامل المبلغ. إذا كان ثمن القلم الواحد 20 ريالاً وثمن المسطرة الواحدة 5 ريالات وثمن الممحاة الواحدة ريالاً واحداً فكم عدد الطرق الممكنة لشراء هذه الأغراض؟

الحل

لنفرض أن x، y، z هو عدد الأقلام، المساطر، المحايات على التوالي. عندئذ، لدينا

$$20x + 5y + z = 1000 \quad (١)$$

$$x + y + z = 100 \quad (٢)$$

بطرح المعادلة الثانية من المعادلة الأولى نجد أن $19x + 4y = 900$. أي أن

$$y = \frac{900 - 19x}{4} = 225 - \frac{19}{4}x \quad (٣)$$

وبما أن y عدد صحيح يحقق $0 < y < 99$ نجد بالتعويض في المعادلة (٣) أن

$$0 < 225 - \frac{19}{4}x < 99$$

$$-225 < -\frac{19}{4}x < 99 - 225$$

$$-225 < -\frac{19}{4}x < -126$$

$$\frac{126 \times 4}{19} < x < \frac{4 \times 225}{19}$$

$$26.53 < x < 47.36$$

لاحظ أن x عدد صحيح مضاعف للعدد 4 (من المعادلة ٣). ولذا فقيم x هي 28 ، 32 ، 36 ، 40 ، 44 .

إذا كان $x = 28$ أو $x = 32$ فإن $x + y > 100$ وهذا مستحيل. أما القيم الثلاثة الأخرى فإنها تعطي الحلول

$$x = 36 ، y = 54 ، z = 10$$

$$x = 40 ، y = 35 ، z = 25$$

$$x = 44 ، y = 16 ، z = 40$$

وبهذا يكون عدد الحلول الممكنة هو 3 .

(٣٨) كم عدد القواسم الفردية للعدد $2^7 \times 3^4 \times 7^3$؟

الحل

لاحظ أن قواسم العدد هي على الصورة $2^a \times 3^b \times 7^c$ حيث $a \in \{0,1,2,\ldots,7\}$ ، $b \in \{0,1,2,3,4\}$ ، $c \in \{0,1,2,3\}$. ولكي يكون القاسم فردياً فإن $a = 0$. إذن، عدد القواسم الفردية هو $1 \times 5 \times 4 = 20$.

(٣٩) كم عدد الأعداد المكونة من 4 مراتب و لا تزيد عن 5000 والتي مراتبها مأخوذة من المراتب $\{0,1,2,3,4,5\}$ ؟

الحل

أكبر هذه الأعداد هو 5000 وهو العدد الوحيد الذي مرتبة آلافه هي 5 . إذن، باقي الأعداد هي على الصورة $ABCD$ حيث $A \neq 0,5$ ، وكل من B و C و D تأخذ القيم من 0 إلى 5 . إذن، عدد هذه الأعداد هو $4 \times 6 \times 6 \times 6 = 864$. وبإضافة العدد 5000 نجد أن العدد المطلوب هو 865 .

(٤٠) [PACAT] لدينا 6 صناديق مرقمة بالأرقام $1,2,3,4,5,6$. نريد أن نضع في كل منها كرة خضراء أو كرة حمراء بشرط أن نضع كرة خضراء في صندوق واحد على الأقل وأن الصناديق التي سنضع فيها كرات خضراء يجب أن تكون أرقامها متتالية. ما عدد الطرق الممكنة لعمل ذلك؟

الحل

ندرس الست حالات الممكنة لوضع الكرات الخضراء والتي تحدد لنا الطرق الممكنة

(أ) صندوق واحد فقط يحتوي كرة خضراء. في هذه الحالة عدد الطرق هو 6 (أي من الصناديق الستة).

(ب) صندوقان يحتوي كل منهما كرة خضراء. في هذه الحالة لدينا خمسة خيارات لوضع كرتين خضراوين هي $(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6)$.

(ت) 3 صناديق يحتوي كل منها كرة خضراء. في هذه الحالة لدينا 4 خيارات لوضع ثلاث كرات خضراء هي $(4,5,6),(3,4,5),(2,3,4),(1,2,3)$.

(ث) 4 صناديق يحتوي كل منها كرة خضراء. في هذه الحالة لدينا 3 خيارات لوضع أربع كرات خضراء هي $(3,4,5,6),(2,3,4,5),(1,2,3,4)$.

(ج) 5 صناديق يحتوي كل منها كرة خضراء. في هذه الحالة لدينا خياران لوضع خمس كرات خضراء هما $(2,3,4,5,6),(1,2,3,4,5)$.

(ح) 6 صناديق يحتوي كل منها كرة خضراء. في هذه لدينا خيار واحد هو $(1,2,3,4,5,6)$.

إذن، عدد الطرق هو $21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$.

مسائل غير محلولة

(١) عدد حدود المتتالية $60, 70, 80, \ldots, 540$ يساوي

(أ) 47 (ب) 48 (ج) 49 (د) 50

(٢) كم عدد الأعداد الصحيحة بين العددين 29و 817 التي باقي قسمتها على 7 يساوي 3؟

(أ) 111 (ب) 112 (ج) 113 (د) 114

(٣) كم عدد المكعبات الكاملة بين العددين 33و 27710؟

(أ) 26 (ب) 27 (ج) 28 (د) 29

(٤) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي أصغر من 1000وجميع مراتبها مختلفة؟

(أ) 738 (ب) 758 (ج) 770 (د) 775

(٥) كم عدد الأعداد المكونة من ثلاث مراتب بحيث تكون جميع مراتبها زوجية مختلفة؟

(أ) 40 (ب) 45 (ج) 47 (د) 48

(٦) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي لا تزيد عن 1000والتي لا تقبل القسمة على 2 و لا تقبل القسمة على 3؟

(أ) 333 (ب) 666 (ج) 777 (د) 888

(٧) كم عدد الأعداد الصحيحة x، $1 \leq x \leq 1100$ حيث x مربع كامل أو مكعب كامل؟

(أ) 25 (ب) 30 (ج) 33 (د) 39

(٨) ما عدد الأعداد المكونة من مرتبتين بحيث يكون مجموع المرتبتين عدداً فردياً؟

(أ) 30 (ب) 40 (ج) 45 (د) 50

(٩) كم عدد المجموعات الجزئية من المجموعة $\{1,2,3,...,10\}$ التي تحتوي على عدد فردي واحد فقط؟

(أ) 150 (ب) 160 (ج) 170 (د) 180

(١٠) [Aust.MC 1987] استخدمنا 642 مرتبة (خانة) لترقيم صفحات كتاب. ما عدد صفحات الكتاب ؟

(أ) 250 (ب) 251 (ج) 252 (د) 253

(١١) [Aust.MC 1992] كم عدد الأعداد الزوجية المكونة من 4 مراتب مأخوذة من المراتب 1، 2 , 3 ، 5؟

(أ) 2 (ب) 6 (ج) 12 (د) 18

(١٢) [Aust.MC 1995] أردنا وضع خمس بيضات مختلفة الألوان في وعاءين بحيث يحتوي الوعاء الواحد على بيضة واحدة على الأقل. ما عدد الطرق الممكنة لإنجاز ذلك ؟

(أ) 24 (ب) 28 (ج) 30 (د) 32

(١٣) [Aust.MC 1998] ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من 900 والتي هي مضاعفات للعدد 7 ومرتبة آحادها هي 2؟

(أ) 10 (ب) 12 (ج) 13 (د) 17

(١٤) [Aust.MC 1998] ما عدد الأعداد الصحيحة الأكبر من 4000 والتي مراتبها مختلفة مأخوذة من المراتب 2، 3، 4، 5، 6؟

(أ) 72 (ب) 120 (ج) 144 (د) 192

(١٥) [Aust.MC 1997] لدينا 25 بطاقة مكتوب على كل منها عدد فردي

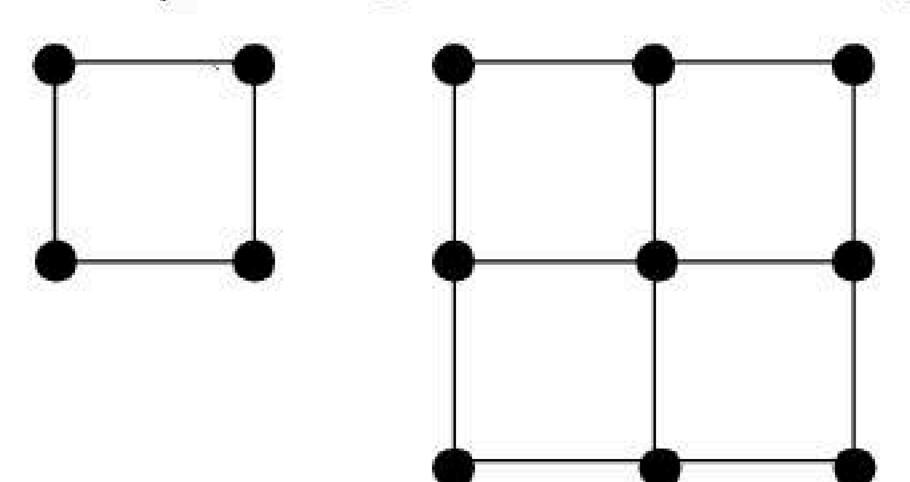
مختلف من بين الأعداد الفردية من 1إلى 49 . بدأنا بأخذ البطاقة المكتوب عليها العدد 5 . كل من الخطوات بعد ذلك تكون بأخذ البطاقة المكتوب عليها أكبر قاسم فردي للعدد $x - 99$حيث xهو العدد المكتوب على البطاقة المأخوذة بالخطوة السابقة. بعد الانتهاء، كم عدد البطاقات المتبقية؟

(أ) 5 (ب) 8 (ج) 12 (د) 18

(١٦) [Aust.MC 1998] عدد لاعبي كرة المضرب في أحد النوادي يساوي 16 لاعباً. أثناء التدريب قسمهم المدرب إلى مجموعتين متساويتين. كل لاعب يلعب مع كل من لاعبي مجموعته ومع كل من لاعبي المجموعة الثانية ثم يعود ويلعب مع كل من لاعبي مجموعته. كم عدد المباريات التي لعبها لاعبو النادي؟

(أ) 168 (ب) 176 (ج) 352 (د) 462

(١٧) [Aust.MC 1997] كونا مربعاً طول ضلعه 1من أربعة أعواد كبريت ومربعاً طول ضلعه 2مكوناً من أربع مربعات طول ضلع كل منها 1 باستخدام 12عوداً من الكبريت كما هو مبين في الشكل المرفق.



كم عوداً من الكبريت نحتاج إليه لتكوين مربع طول ضلعه 20مقسم إلى مربعات وحدة؟

(أ) 800 (ب) 820 (ج) 840 (د) 860

(١٨) [Aust.MC 1998] بكم طريقة يمكنك صعود درج مكون من 10درجات

بحيث تصعد في كل خطوة إما درجة واحدة أو ثلاث درجات ؟

(أ) 15 (ب) 20 (ج) 24 (د) 28

(١٩) [AMC10B 2007] ليكن n هو أصغر عدد صحيح موجب يقبل القسمة على كل من العددين 4 و 9 ومراتبه مأخوذة من المرتبتين 4 و 9 بحيث تظهر كل منهما مرة واحدة على الأقل. ما المراتب الأربع الأولى (الآحاد والعشرات والمئات والآلاف) من العدد n ؟

(أ) 4494 (ب) 4944 (ج) 9444 (د) 9944

(٢٠) [AMC10A 2007] عينت شركة سياحية دليلين لمجموعة سياح عددها 6 . إذا كان على كل سائح أن يختار أحد الدليلين على شرط أن يكون مع كل من الدليلين سائح واحد على الأقل فما عدد الطرق الممكنة لتوزيع السياح على الدليلين؟

(أ) 56 (ب) 58 (ج) 60 (د) 62

(٢١) [AMC10A 2006] تتكون لوحات السيارات في دولة سيكينا من 4 مراتب مأخوذة من المراتب 0 إلى 9 وحرفان مأخوذان من الحروف A إلى Z (عددها 26). كم عدد اللوحات الممكنة إذا اشترطت شرطة الدولة أن يظهر الحرفان واحداً بجانب الآخر؟

(أ) $10^4 \times 26^2$ (ب) $6 \times 10^4 \times 26^2$

(ج) $5 \times 10^4 \times 26^2$ (د) $5 \times 10^3 \times 26^3$

(٢٢) [AMC10A 2006] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من أربع مراتب وواحدة من مراتبها على الأقل هي 2 أو 3 ؟

(أ) 2439 (ب) 3584 (ج) 4904 (د) 5416

(٢٣) [AMC10B 2005] كم عدد الأعداد الصحيحة بين 1 و 2005 التي تكون مضاعفات للعدد 4 أو 3 ولكنها ليست مضاعفات للعدد 12؟

أ) 668 ب) 835 ج) 1002 د) 1169

(٢٤) [AMC10A 2005] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة n التي تحقق $(130n)^{50} > n^{100} > 2^{200}$؟

أ) 125 ب) 126 ج) 130 د) 132

(٢٥) [AMC10A 2005] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من ثلاث مراتب بحيث تكون مرتبة عشراتها تساوي متوسط مرتبتي الآحاد والمئات ؟

أ) 45 ب) 46 ج) 50 د) 54

(٢٦) [AMC10A 2005] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة n بحيث يقبل العدد $6n$ القسمة على المجموع $1 + 2 + 3 + \cdots + n$؟

أ) 3 ب) 5 ج) 7 د) 9

(٢٧) [AMC10A 2005] لتكن S هي المجموعة المكونة من أول 2005 مضاعفاً موجباً للعدد 4 ولتكن T هي المجموعة المكونة من أول 2005 مضاعفاً موجباً للعدد 6. ما عدد الأعداد المشتركة بين المجموعتين؟

أ) 166 ب) 333 ج) 668 د) 1001

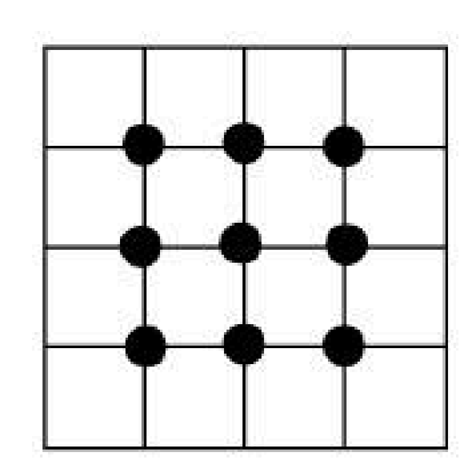
(٢٨) [Gauss 2006] وصل 8 أصدقاء إلى المطعم لتناول وجبة العشاء. وصافح كل منهم الأصدقاء السبعة الآخرين. بعد ذلك وصل صديق تاسع إلى المطعم وصافح بعض الأصدقاء الموجودين. إذا كان عدد المصافحات التي تمت هو 32 فكم شخصاً صافح الصديق التاسع؟

أ) 4 ب) 5 ج) 6 د) 7

(٢٩) [Gauss 2005] جرى استفتاء على 50 طالباً لمعرفة اللعبة المفضلة لديهم وكانت نتيجة الاستفتاء أن 33 منهم يفضلون كرة القدم و 24 منهم يفضلون كرة السلة و 8 لا يفضلون أياً من الكرتين. كم عدد الطلاب من بين الطلاب الذين جرى عليهم الاستفتاء يفضلون كرة القدم وكرة السلة معاً ؟

(أ) 1 (ب) 7 (ج) 9 (د) 15

(٣٠) [Pascal 2010] الشكل المرفق يبين نقاط التقاطع الداخلية لمربع طول ضلعه 4 مقسم إلى مربعات وحدة. ما عدد التقاطعات الداخلية لمربع طول ضلعه 12؟



(أ) 100 (ب) 121 (ج) 144 (د) 148

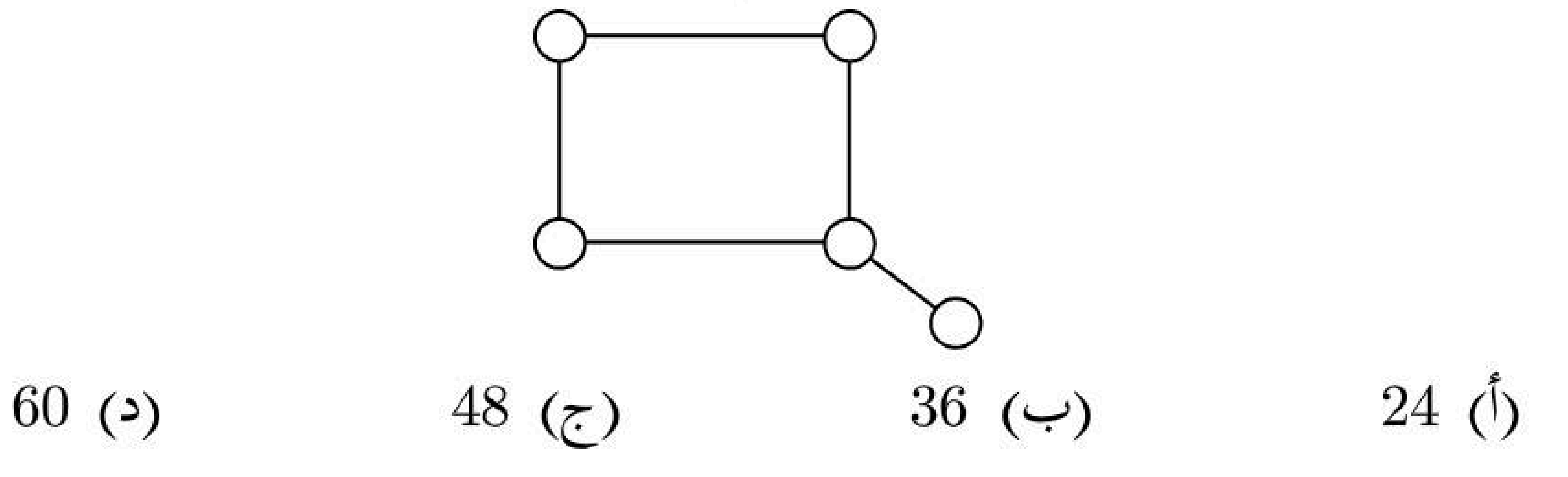
(٣١) [Pascal 2009] مجموع حدود المتتابعة التزايدية $3 < 4 < 5 < 8 < 9$ يساوي 29. كم عدد المتتابعات التزايدية التي عدد حدودها 5 ومجموع حدودها 33 المكونة من أعداد صحيحة موجبة كل منها ذو مرتبة واحدة؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

(٣٢) [Pascal 2008] نقول إن العدد المكون من ثلاث مراتب عدد عمودي إذا كان مجموع مرتبتي المئات والعشرات يساوي مرتبة الآحاد، مثلاً العدد 145 عدد عمودي. ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة العمودية والمكونة من ثلاث مراتب؟

(أ) 35 (ب) 45 (ج) 50 (د) 55

(٣٣) [Pascal 2008] الشكل المرفق يبين خمس دوائر في المستوى. نريد تلوين كل من هذه الدوائر باللون الأحمر أو الأزرق أو الأخضر بحيث تأخذ الدائرتان المتجاورتان لونين مختلفين. كم عدد التلوينات الممكنة ؟



(أ) 24 (ب) 36 (ج) 48 (د) 60

(٣٤) [AMC10A 2004] يمكن لأحمد إضافة كاتشب أو مايونيز أو طماطم أو خردل أو خس أو مخلل أو جبن أو بصل عند شرائه فطيرة هامبرجر من الحجم الصغير أو الوسط أو الكبير. ما عدد الطرق المختلفة التي يمكن لأحمد أن يختار بها فطيرة الهامبرجر؟

(أ) 256 (ب) 512 (ج) 768 (د) 1024

(٣٥) [AMC10B 2003] عند وصول المتقدمين لمسابقة AMC إلى مدينة نبراسكا لتقديم الاختبار لاحظ المدرب أن المدينة قد غيرت أرقام لوحات السيارات حيث كانت أرقام لوحات السيارات السابقة للمدينة مكونة من حرف مأخوذ من حروف الإنجليزية يتبعه عدد مكون من أربع مراتب. أما اللوحات الحالية فمكونة من ثلاثة حروف متبوعة بعدد مكون من ثلاث مراتب. بكم مضاعفاً زاد عدد اللوحات الجديدة الممكنة عن القديمة؟

(أ) $\frac{26}{10}$ (ب) $\frac{26^2}{10}$ (ج) $\frac{26^3}{10^3}$ (د) $\frac{26^3}{10^2}$

(٣٦) موظف كسول وضع 10رسائل مختلفة في صناديق بريد عشرة أشخاص عشوائياً. ما عدد الطرق الممكنة ليكون شخص واحد على الأقل وجد الرسالة الخطأ في صندوق بريده؟

(أ) 3628799 (ب) 3628800 (ج) 3628880 (د) 4814400

(٣٧) [PACAT] نريد حفظ 5 كتب رياضيات متشابهة، 6 كتب فيزياء متشابهة، 3 كتب كيمياء متشابهة في ملفات على سطح شاشة حاسب آلي. كم عدد الملفات اللازمة لذلك بشرط أن تحتوي الملفات على كتاب رياضيات وكتاب فيزياء على الأقل؟

(أ) 240 (ب) 6144 (ج) 16384 (د) 15624

(٣٨) [PACAT] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من 5مراتب وتقبل القسمة على 3بحيث مراتبها مأخوذة من المجموعة $\{0,1,2,3,4,5\}$ بدون تكرار المراتب؟

(أ) 96 (ب) 120 (ج) 216 (د) 625

(٣٩) [PACAT]تحلقت مجموعة من الأطفال حول دائرة، كل منهم في مكان مختلف. يقوم كل زوج من الأطفال غير المتجاورين برمي كرة على بعضهما البعض لمدة ثلاث دقائق وهكذا لمدة ساعة. ما عدد الأطفال؟

(أ) 6 (ب) 7 (ج) 8 (د) 9

(٤٠) ذهب محمود للتسوق واشترى بمبلغ 107ريالات وعندما أراد دفع ثمن المشتريات وجد أن محفظته تحتوي على عملات من الفئات 1ريـــال، 10 ريـــال، 50ريـــال فقط. بكم طريقة يمكن أن يدفع محمود ثمن مشترياته؟

(أ) 17 (ب) 18 (ج) 19 (د) 20

إجابات المسائل غير المحلولة

(١) ج	(٢) ج	(٣) ب	(٤) أ	(٥) د
(٦) أ	(٧) د	(٨) ج	(٩) ب	(١٠) أ
(١١) ب	(١٢) ج	(١٣) ج	(١٤) د	(١٥) د
(١٦) ب	(١٧) ج	(١٨) د	(١٩) ب	(٢٠) د
(٢١) ج	(٢٢) د	(٢٣) ب	(٢٤) أ	(٢٥) أ
(٢٦) ب	(٢٧) ج	(٢٨) أ	(٢٩) د	(٣٠) ب
(٣١) أ	(٣٢) ب	(٣٣) ب	(٣٤) ج	(٣٥) ب
(٣٦) أ	(٣٧) د	(٣٨) ج	(٣٩) ج	(٤٠) ب

الفصل الثاني

التباديل والتوافيق
Permutations and Combinations

المضروب[Factorial]

نحتاج لحل العديد من مسائل العد إلى ضرب أعداد صحيحة موجبة متتالية كما رأينا في الفصل الأول، على سبيل المثال،عدد طرق اصطفاف 5 طلاب في صف هو $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ و عدد طرق اختيار ثلاثة طلاب على التوالي من 9 طلاب هو $9 \times 8 \times 7$.

ولغرض تسهيل هذه الحسابات نقدم مفهوم مضروب العدد الصحيح الموجب n ويرمز له بالرمز $n!$ (يقرأ مضروب n) ويعرف على أنه

$$\boxed{n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3 \times 2 \times 1}$$

لاحظ إمكانية كتابة $9 \times 8 \times 7$ باستخدام المضروب على النحو التالي:

$$9 \times 8 \times 7 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{9!}{6!}$$

لاحظ أيضاً أن

$$n! = n \times (n-1)! = n \times (n-1) \times (n-2)! = \cdots$$

وعندما يكون $n = 1$ نرى أن $1! = 1 \times 0!$.ولذا نعرف $0! = 1$.

مثال (١) بسط المقدار $\dfrac{6!+5!-4!}{4!}$.

الحل

$$\frac{6!+5!-4!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times 4! + 5 \times 4! - 4!}{4!} = \frac{4!(30+5-1)}{4!} = 34 \quad \diamond$$

مثال (٢) بسط المقدار $\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{n+3}$

الحل

$$\frac{(n+2)!+(n+1)!}{n+3} = \frac{(n+1)!(n+2+1)}{n+3} = \frac{(n+1)!(n+3)}{n+3} = (n+1)! \quad \diamond$$

التباديل[Permutations]

تبديل مجموعة من الرموز هو أي ترتيب لهذه الرموز. على سبيل المثال، BAC هو تبديل للرموز A ، B ، C . ومن الممكن إيجاد جميع هذه التبديلات وهي

ABC , ACB , BAC , BCA , CAB , CBA .

أحياناً، يكون اهتمامنا منصباً على إيجاد تبديلات بعض الرموز وليس جميعها. فمثلاً، تبديلات رمزين من رموز المجموعة $\{A,B,C\}$ هي

AB , BA , CA , AC , BC , CB

إذا كانت S مجموعة مكونة من n من العناصر المختلفة وكان $r \leq n$ فنرمز لعدد تبديلات r من عناصر المجموعة S بالرمز $P(n,r)$ أو الرمز ${}_nP_r$ أو P_r^n .

من السهل إيجاد هذا العدد على النحو التالي: يمكن اختيار العنصر الأول بعدد من الطرق يساوي n (لأن عدد عناصر المجموعة يساوي n). ومن ثم يمكن اختيار العنصر الثاني من التبديل بعدد من الطرق يساوي $n-1$. وبالمثل، عدد طرق اختيار العنصر الثالث يساوي $n-2$ وهكذا إلى أن نجد أن عدد طرق اختيار العنصر r يساوي $n-r+1$. وبهذا نجد من مبدأ الضرب أن

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها $r = n$ نجد أن

$$P(n,n) = \frac{n!}{0!} = n!$$

مثال (٣) أراد خمسة أصدقاء، أحمد ومحمد ويونس وحمزة وهاشم أن يقفوا في صف واحد لالتقاط صورة جماعية.

(أ) بكم طريقة يمكن إنجاز ذلك؟

(ب) بكم طريقة يمكن إنجاز ذلك إذا أصر يونس أن يكون في آخر الصف من اليمين؟

(ج) بكم طريقة يمكن إنجاز ذلك إذا أصر أحمد أن يكون الثاني من اليسار ومحمد الثاني من اليمين؟

(د) بكم طريقة يمكن إنجاز ذلك إذا أصر أحمد و هاشم على أن يكونا في بداية أو نهاية الصف؟

الحل

(أ) عدد الطرق في هذه الحالة هو عدد تبديلات خمسة عناصر وهو $5! = 120$

.

(ب) يمكن اختيار يونس بطريقة واحدة والأربعة أشخاص الآخرين بعدد $4!$ من الطرق. إذن، عدد الطرق يساوي $1 \times 4! = 24$.

(ج) يمكن اختيار كل من أحمد ومحمد بطريقة واحدة والبقية بعدد $3!$ من الطرق. إذن، عدد الطرق يساوي $1 \times 1 \times 3! = 6$.

(د) يمكن اختيار أحمد أو هاشم في بداية الصف بطريقتين وبعد اختيار أحدهما ليكون في البداية نضع الآخر في النهاية بطريقة واحدة. بعد ذلك عدد طرق ترتيب الثلاثة الباقيين يساوي $3!$. إذن، عدد الطرق هو $2 \times 1 \times 3! = 12$. ◇

مثال (٤) أردنا ترتيب خمسة كتب رياضيات مختلفة وكتابي فيزياء مختلفين في صف واحد على أحد رفوف مكتبة. بكم طريقة يمكن إنجاز ذلك إذا أردنا أن نضع كتابي الفيزياء بجانب بعضهما البعض؟

الحل

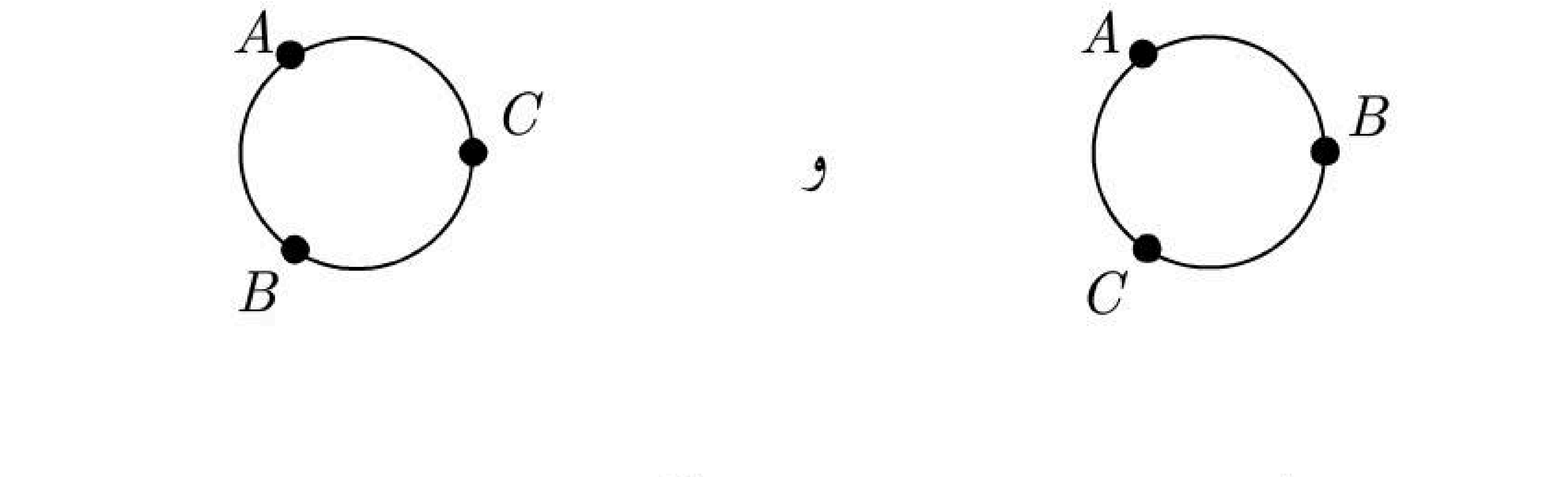
يمكن وضع كتابي الفيزياء A و B بجانب بعضهما البعض بطريقتين هما AB و BA. الآن، يمكن النظر إلى الكتابين على أنهما كتاب واحد. وبهذا نحتاج إلى إيجاد عدد طرق ترتيب 6 كتب (5 رياضيات وكتاب فيزياء). وهذا العدد هو $6!$. إذن، عدد الطرق المطلوب هو $2 \times 6! = 1440$. ◇

التباديل الدائرية [Circular Permutations]

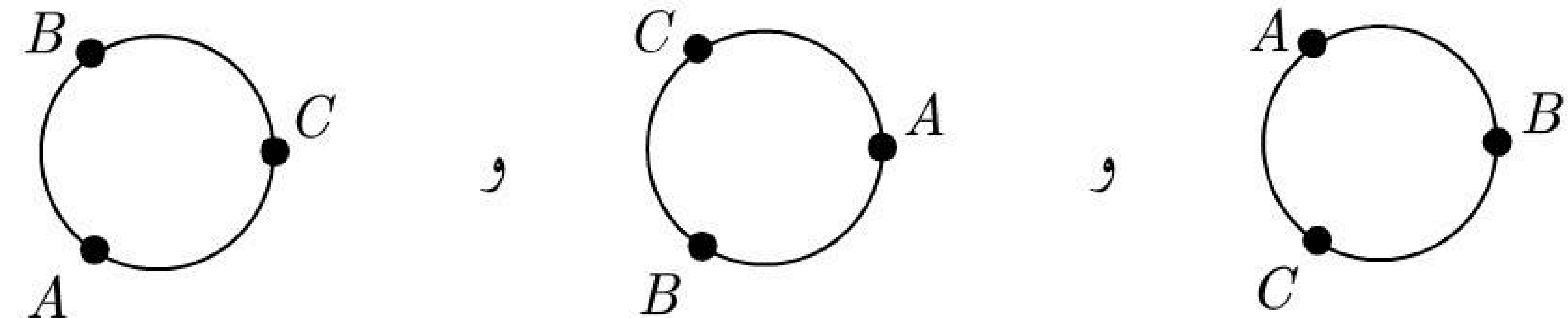
عدد تبديلات الحروف الثلاثة A ، B ، C هو 6 وهي

$$ABC\ ,\ ACB\ ,\ BAC\ ,\ BCA\ ,\ CAB\ ,\ CBA$$

ولكن لو أردنا وضع هذه الحروف على دائرة فإننا سنلاحظ وجود تبديلين فقط هما



لأن



تعتبر تبديلاً دائرياً واحداً.وبصورة عامة إذا أردنا إيجاد عدد التبديلات الدائرية لمجموعة مكونة من n من العناصر فإن هذا العدد يكون

$$\boxed{\frac{n!}{n} = (n-1)!}$$

لأن أي تبديل يقابل n من الأنساق الدائرية غير المختلفة.

التوافيق [Combinations]

إذا كانت $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ وكان $r \leq n$ فإن التوفيق من النوع r هو اختيار غير مرتب لعدد r من عناصر A، أي أنه بكل بساطة مجموعة جزئية من A عدد عناصرها r. على سبيل المثال، إذا أردنا اختيار لجنة مكونة من ثلاثة أشخاص من بين مجموعة الأشخاص $\{A, B, C, D, E\}$ فإن هذه الخيارات، حيث الترتيب غير مهم هي

$$ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE$$

لاحظ أن عدد هذه الخيارات يساوي 10.

يرمز عادة لعدد خيارات r عنصراً من مجموعة مكونة من n عنصراً بالرمز $C(n,r)$ أو $\binom{n}{r}$ أو C_r^n ويسمى أيضاً بمعامل ذات الحدين. إذا كان $0 \leq r \leq n$ فإن

$$\boxed{C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

ويمكن رؤية ذلك، بملاحظة أنه يمكن الحصول على $P(n,r)$ من $C(n,r)$ وذلك باختيار ترتيب العناصر التي عددها r (عدد طرق ترتيبها هو $r!$). إذن، $P(n,r) = r!C(n,r)$. أي أن $C(n,r) = \dfrac{P(n,r)}{r!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$.

ملحوظة

لاحظ أن $C(n,r) = C(n,n-r)$ حيث $r \leq n$. وذلك لأن

$$C(n,n-r) = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = C(n,r).$$

أو لأن عدد طرق اختيار r عنصراً من n عنصراً هو نفس عدد طرق اختيار $n-r$ عنصراً من n عنصراً.

مثال (٥) أردنا تكوين لجنة مكونة من 4 أشخاص من بين 7 مهندسين و 6 إداريين. بكم طريقة يمكن إنجاز ذلك ؟

(أ) إذا لم يوجد شروط على تكوين اللجنة.

(ب) إذا كانت اللجنة مكونة من مهندسيْن وإدارييْن.

(ج) إذا كانت اللجنة تحتوي على الأقل مهندساً واحداً وعلى الأقل إدارياً واحداً.

الحل

(أ) إذا لم نضع أي شروط على تكوين اللجنة فنحتاج إلى اختيار 4 أشخاص من بين 13 شخصاً. وبهذا يكون عدد الطرق الممكنة هو

$$C(13,4) = \frac{13!}{4! \times 9!} = 715$$

(ب) في هذه الحالة نختار مهندسين من بين 7 مهندسين بعدد من الطرق يساوي

$$C(7,2) = \frac{7!}{2! \times 5!} = 21$$

ونختار إداريين من بين 6 إداريين بعدد من الطرق يساوي

$$C(6,2) = \frac{6!}{2! \times 4!} = 15$$

إذن، عدد طرق تكوين اللجنة هو

$$C(7,2) \times C(6,2) = 21 \times 15 = 315 .$$

(ج) عدد طرق اختيار اللجنة في هذه الحالة هو

$$C(7,3) \times C(6,1) + C(7,2) \times C(6,2) + C(7,1) \times C(6,3)$$

أو

$$C(13,4) - C(7,4) \times C(6,0) - C(7,0) \times C(6,4)$$

وفي كلتا الحالتين هذا العدد يساوي 665. ◇

مثال (٦) وضعنا 8 نقاط مختلفة وهي A, B, C, D, E, F, G, H على محيط دائرة.

(أ) كم عدد المستقيمات التي يمكن تكوينها؟

(ب) كم عدد المستقيمات التي يمكن تكوينها والتي تمر بالنقطة B ؟

(ج) كم عدد المثلثات التي يمكن تكوينها؟

(د) كم عدد المثلثات التي يمكن تكوينها بحيث تكون B هي أحد الرؤوس؟

الحل

(أ) كل مستقيم يمر بنقطتين. ولذا فعدد المستقيمات هو عدد طرق اختيار عنصرين من 8 عناصر وهذا يساوي $C(8,2) = \frac{8!}{2! \times 6!} = 28$

(ب) بما أن المستقيمات تمر بالنقطة B فيمكن تكوين المستقيمات بعدد من الطرق $C(7,1) = 7$.

(ج) لكل مثلث ثلاثةرؤوس. إذن، عدد المثلثات هو عدد طرق اختيار 3 عناصر من بين 8 عناصر وهذا يساوي $C(8,3) = \frac{8!}{3! \times 5!} = 56$.

(د) بما أن B هي أحد رؤوس المثلث فنحتاج إلى نقطتين للرأسين الآخرين. إذن، عدد المثلثات هو $C(7,2) = \frac{7!}{2! \times 5!} = 21$. ◇

التباديل مع وجود عناصر متشابهة

[Permutations with Indistinguishable Objects]

في العديد من مسائل العد نحتاج لمعالجة وجود عناصر متشابهة (لا يمكن تمييزها عن بعضها البعض) ونوضح ذلك في المثال التالي.

مثال (٧) ما عدد الكلمات التي يمكن الحصول عليها بإعادة ترتيب حروف الكلمة summertime ؟

الحل

الكلمة مكونة من عشرة حروف حيث الحرف m مكرر ثلاث مرات والحرف e مكرر مرتين. ولذا، يكون المطلوب إيجاد عدد تبديلات مجموعة مكونة من عشرة حروف مع تكرار بعض حروفها. ولإنجاز ذلك، لاحظ أن الثلاثة حروف m يمكن أن توضع في أي من العشرة مواقع ويمكن إنجاز ذلك بعدد من الطرق يساوي $C(10,3)$. وبهذا يتبقى لنا 7 مواقع. بعد ذلك يمكن وضع أي من الحرفين e بأي من هذه المواقع السبعة بعدد من الطرق يساوي $C(7,2)$. الآن، تبقى 5 مواقع. نضع الآن الحرف s بأي من هذه المواقع الخمسة بعدد من الطرق يساوي $C(5,1)$، ثم نضع الحروف u، r، t، i بعدد من الطرق $C(4,1)$، $C(3,1)$، $C(2,1)$، $C(1,1)$ على التوالي. الآن، استناداً إلى مبدأ الضرب نجد أن عدد تبديلات الكلمة Summertime يساوي

$$C(10,3) \times C(7,2) \times C(5,1) \times C(4,1) \times C(3,1) \times C(2,1) \times C(1,1)$$
$$= \frac{10!}{3! \times 7!} \times \frac{7!}{2! \times 5!} \times \frac{5!}{1! \times 4!} \times \frac{4!}{1! \times 3!} \times \frac{3!}{1! \times 2!} \times \frac{2!}{1! \times 1!} \times \frac{1!}{1! \times 0!}$$
$$= \frac{10!}{3! \times 2! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1!}$$

وهذا العدد يساوي 50400. ◇

يمكن تعميم المثال (٧) لنحصل على:

عدد التبديلات المختلفة لمجموعة عدد عناصرها n حيث n_1 من عناصرها متشابهة من النمط الأول و n_2 من عناصرها متشابهة من النمط الثاني، ...، n_k من عناصرها متشابهة من النمط n_k يساوي

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}$$

مثال (٨) ما عدد الكلمات التي يمكن الحصول عليها بترتيب حروف الكلمة parallel؟

الحل

عدد التبديلات المطلوب هو

$$\frac{8!}{3! \times 2! \times 1! \times 1! \times 1!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 2} = 560.$$ ◇

استراتيجية النجوم والأشرطة [Stars and Bars Strategy]

تستخدم هذه الاستراتيجية لإيجاد عدد طرق توزيع n من العناصر المتشابهة على r من الأوعية المختلفة $A_1, A_2, \ldots, A_r$. لتوضيح هذه الطريقة نبدأ بالمثال التالي:

مثال (٩) بكم طريقة يمكن أن يختار أحمد أربعة أقلام من بين ثلاثة أنواع من الأقلام هي مرسم، حبر جاف، حبر سائل بفرض توافر أربعة أقلام على الأقل من كل نوع ؟

الحل

لاحظ أن هذه هي مسألة اختيار أربعة عناصر من مجموعة مكونة من ثلاثة عناصر هي مرسم، حبر جاف، حبر سائل مع السماح بتكرار هذه العناصر. ويمكن النظر

إليها على أنها إيجاد عدد طرق توزيع 4 عناصر متشابهة وهي الأقلام على ثلاثة أوعية مختلفة هي مرسم، حبر جاف، حبر سائل.

الحل المباشر لهذه المسألة يكون بسرد الخيارات الممكنة ومن ثم عدها. ولتسهيل عملية العد نفرض أن الثلاثي المرتب (A_1, A_2, A_3) يرمز لعدد أقلام المرسم، الحبر الجاف، الحبر السائل الذي تم اختياره. نقسم الآن المسألة حسب نوع الأقلام المختارة.

(أ) الأقلام الأربعة من نوع واحد. في هذه الحالة لدينا ثلاثة خيارات هي

$$(0,0,4)\ ,\ (0,4,0)\ ,\ (4,0,0)$$

(ب) ثلاثة أقلام من نوع وقلم من نوع آخر. في هذه الحالة لدينا ستة خيارات

$$(3,1,0)\ ,\ (3,0,1)\ ,\ (1,3,0)\ ,\ (1,0,3)\ ,\ (0,3,1)\ ,\ (0,1,3)$$

(ج) قلمان من نوع والقلمان الآخران من نوع ثان. لدينا في هذه الحالة 3 خيارات

$$(2,2,0)\ ,\ (2,0,2)\ ,\ (0,2,2)$$

(د) قلمان من نوع وقلم من كل من النوعين الآخرين. هذه هي الحالة الأخيرة ونحصل منها على ثلاثة خيارات هي

$$(2,1,1)\ ,\ (1,2,1)\ ,\ (1,1,2)$$

وبهذا يكون عدد طرق اختيار الأربعة أقلام هو

$$3 + 6 + 3 + 3 = 15\ .$$

يمكن تسهيل حل المسألة باستخدام استراتيجية الأشرطة والنجوم على النحو التالي: نفرض أن المكتبة وضعت الأقلام على رف مقسوم إلى ثلاثة أجزاء مفصولة عن بعضها البعض بعمودين من الخشب (شريطين) بحيث يوضع في كل قسم من هذه

الأقسام نوع واحد من أنواع الأقلام الثلاثة. كما هو مبين في الشكل أدناه.

أقلامالمرسم | أقلاماالحبرالجاف | أقلاماالحبرالسائل

الآن، اختيار أربعة أقلام يتم بوضع أربعة نجوم في الأجزاء الثلاثة التي تمثل الخيار. على سبيل المثال، الشكل المرفق يبين أربع خيارات

```
     |     | * * * *
     | *   | * * *
     | * * | * *
 *   | *   | * *
```

وبهذا فإن عدد طرق اختيار أربعة أقلام يقابل عدد طرق ترتيب شريطين وأربعة نجوم. أي هو عدد طرق اختيار مواقع أربعة نجوم من بين ستة مواقع وهذا العدد هو

$$. C(6,4) = \frac{6!}{4! \times 2!} = 15 \qquad \diamond$$

مثال (١٠) لدى عبدالله 6 ريالات ويريد توزيعها على أربعة من أخوته، محمد، أحمد، فهد، سلطان. بكم طريقة يمكن عمل ذلك ؟

الحل

نفرض أن لدينا ثلاثة أشرطة لفصل نصيب كل من الأخوة الأربعة

محمد | أحمد | فهد | سلطان

وستة نجوم تمثل كل منها ريالاً. إذن، المطلوب هو عدد طرق اختيار مواقع 6 نجوم من بين 9 مواقع وهذا العدد هو

$$. C(9,6) = \frac{9!}{6! \times 3!} = 84 \qquad \diamond$$

مثال (١١) كم عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة

؟ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 60$

الحل

لاحظ أن الحل لهذه المعادلة هو أربعة أعداد صحيحة غير سالبة مجموعها 60. ولإيجاد عدد الحلول نضع ثلاثة أشرطة لفصل المتغيرات

$$x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4$$

ونحتاج إلى 60 نجمة لتمثيل العدد 60. ولهذا يكون المطلوب هو عدد اختيار 60 موقعاً من بين 63 موقعاً وهذا العدد يساوي

$$C(63,60) = \frac{63 \times 62 \times 61}{6} = 39711$$ ◇

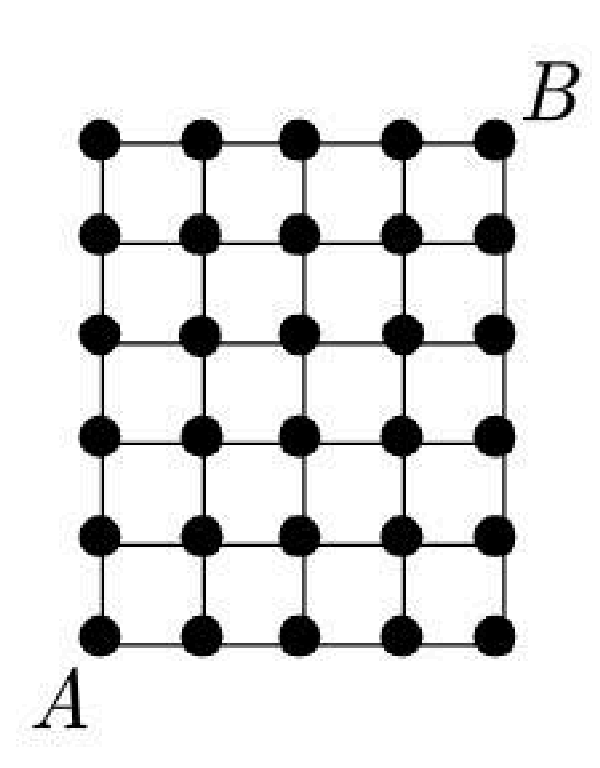
يمكن تعميم حل الأمثلة الثلاثة السابقة على النحو التالي:

> عدد طرق اختيار r من العناصر من مجموعة مكونة من n من العناصر مع السماح بالتكرار هو عدد طرق اختيار مواقع r من النجوم من بين عدد من المواقع يساوي $n + r - 1$. أي عدد طرق اختيار r عنصراً من مجموعة عدد عناصرها $n + r - 1$ دون مراعاة الترتيب وهذا العدد هو $C(n + r - 1, r)$.

نود الإشارة هنا إلى إمكانية استخدام هذه الاستراتيجية بطرق أخرى ستتضح في أمثلة لاحقة.

عدد المسارات [Number of Paths]

مثال (١٢) لدينا الشبكة من النوع 4×5 المبينة في الشكل أدناه



المطلوب هو إيجاد عدد المسارات (الطرق) للوصول من الركن A إلى الركن B بالتحرك على خطوط الشبكة بخطوات طولها 1 باتجاه الشرق (إلى اليمين) أو باتجاه الشمال (إلى الأعلى) فقط. لاحظ أولاً أن المسار يحتاج إلى 4 خطوات أفقية و 5 خطوات رأسية. ولذا فطول المسار يساوي 9. الآن، إذا رمزنا للخطوة الأفقية بالرمز H والخطوة الرأسية بالرمز V فإن أي مسار هو عبارة عن كلمة مكونة من 9 حروف أربع منها H والخمسة الأخرى هي V. وبهذا يكون عدد المسارات هو عدد ترتيب حروف كلمة طولها 9 حروف (4 حروف H و 5 حروف V). هذا العدد ما هو إلا عدد التبديلات المختلفة لمجموعة عدد عناصرها 9 تحتوي على 4 عناصر متشابهة من النمط الأول (H) و 5 عناصر متشابهة من النمط الثاني (V). وبهذا يكون عدد المسارات يساوي $\frac{9!}{4! \times 5!}$. ◇

ملحوظة

لاحظ أنه إذا كانت الشبكة من النوع $m \times n$ فإن عدد المسارات هو $\frac{(m+n)!}{m! \times n!}$، أي $C(n+m, m)$ أو $C(n+m, n)$.

عدد مستطيلات شبكة [Number of Rectangles of a Grid]

مثال (١٣) ما عدد المستطيلات في الشبكة 5×4 المبينة في المثال (١٢)؟

الحل

لاحظ أن المستطيل يتحدد تماماً بمعرفة ركنين متقابلين أو بمعرفة ضلعين متقابلين. ولذا سنقدم حلين لهذه المسألة.

الحل الأول: بمعرفة ركنين متقابلين. ولهذا نحتاج إلى عد المستطيلات التي تشترك بركن علوي على النحو التالي: لكل ركن من أركان الشبكة إذا وجد عدد m من المستقيمات أسفل هذا الركن وعدد n من المستقيمات على يمين هذا الركن فإن عدد مستطيلات الشبكة التي يكون ذلك الركن هو الركن العلوي الأيسر لها يساوي $m \times n$. ولذا فعدد مستطيلات الشبكة مبين في الشكل أدناه

5×4	5×3	5×2	5×1
4×4	4×3	4×2	4×1
3×4	3×3	3×2	3×1
2×4	2×3	2×2	2×1
1×4	1×3	1×2	1×1

لاحظ أن مجموع أعداد الأعمدة هو

$$\begin{aligned}&4(1+2+3+4+5)+3(1+2+3+4+5)\\&+2(1+2+3+4+5)+1(1+2+3+4+5)\\&=15(4+3+2+1)=15\times10=150\end{aligned}$$

وهذا هو عدد المستطيلات المطلوبة.

يمكن تعميم هذا الحل لإيجاد عدد مستطيلات شبكة من النوع $m \times n$ ليكون

$$\begin{aligned}&(1+2+3+\cdots+m)(1+2+3+\cdots+n)\\&=\frac{m(m+1)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{mn(m+1)(n+1)}{4}\end{aligned}$$

الحل الثاني: بمعرفة ضلعين متقابلين. بما أن كل خطين أفقيين متوازيين وكل خطين رأسيين متوازيين يحددان مستطيلاً فعدد المستطيلات التي تحددها الخطوط المتوازية

الأفقية والخطوط المتوازية الرأسية هو عدد مستطيلات الشبكة وهو

$$C(6,2)\times C(5,2)=\frac{6!}{4!\times 2!}\times\frac{5!}{3!\times 2!}=15\times 10=150 .$$

يمكن تعميم هذه الطريقة أيضاً لنجد أن عدد مستطيلات شبكة من النوع $m\times n$:

$$C(m+1,2)\times C(n+1,2) .$$ ◇

ننهي هذا الفصل بتقديم المزيد من الأمثلة على استخدام التباديل والتوافيق في العد.

مثال (١٤) أراد ناصر شراء طبق من الحلويات لتقديمه هدية لأخته هدى فوجد أن لدى المحل علبة تكفي لثماني قطع من الحلويات وأن المحل يبيع أربعة أنواع من الحلويات فقرر أن يشتري ثماني قطع لوضعها في العلبة. بكم طريقة مختلفة يستطيع ناصر أن يقدم الهدية لأخته هدى؟

الحل

نفصل بين أنواع الحلويات بثلاثة أشرطة ونمثل الثماني قطع بواسطة ثمانية نجوم. إذن، المسألة الآن، هي إيجاد عدد طرق اختيار 8 مواقع من بين 11 موقعاً. هذا العدد يساوي $C(11,8)=\frac{11!}{8!\times 3!}=165$. ◇

مثال (١٥) كم عدد الحلول الصحيحة الموجبة للمعادلة $x_1+x_2+x_3+x_4=60$ ؟

الحل

لاحظ أولاً أن الأعداد الصحيحة هنا موجبة. ولكن يمكن تحويل هذه المسألة إلى مسألة مشابهة لتلك المقدمة في المثال (١١) بوضع $y_i=x_i-1$ فتصبح المعادلة تكافئ المعادلة

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 56$$

ويكون عدد الحلول في هذه الحالة هو $C(59,56) = \dfrac{59!}{56! \times 3!} = 32509$.

حل آخر: يمكن استخدام النجوم والأشرطة لحل هذه المسألة على النحو التالي: لدينا 60 نجماً و 3أشرطة كما في السابق ولكن يجب أن نضع نجماً واحداً على الأقل بين كل شريطين ولا بد من وجود نجم واحد على الأقل قبل الشريط في أقصى اليمين ونجم واحد على الأقل بعد الشريط في أقصى اليسار. ولحل هذه الإشكالية نضع الأشرطة بين النجوم. أي $* \ldots * - * - * - *$ويكون لدينا 59 موقعاً لوضع الأشرطة الثلاثة. وبهذا يكون عدد الطرق يساوي $C(59,3)$. ◇

مثال (١٦)[Aust.MC 1983] أثناء مغادرة خمسة طلاب الفصل الدراسي ثلاثة منهم حملوا حقائب آخرين واثنان منهم حمل كل منهما حقيبته. كم عدد الطرق الممكنة لذلك؟

الحل

لنفرض أن الطلاب الذين حملوا حقيبة غيره هم A ، B ، C . هناك طريقتان فقط لحمل كل منهم حقيبة غيره وهما

(أ) A يحمل حقيبة B ، B يحمل حقيبة C ، C يحمل حقيبة A

(ب) A يحمل حقيبة C ، B يحمل حقيبة A ، C يحمل حقيبة B .

عدد طرق اختيار 3أشخاص من بين خمسة أشخاص هو $C(5,3) = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$. إذن، عدد الطرق الكلية هو $20 = 10 \times 2$. ◇

مثال (١٧)[Aust.MC 1981] كم عدد الطرق المختلفة التي يمكن لمراسل مهمل أن يضع أربعة رسائل في صناديق بريد أربع موظفين بحيث يستلم كل من الموظفين

رسالة غيره؟

الحل

يمكن حل هذه المسألة بكتابة تبديلات المجموعة $\{A, B, C, D\}$ وعددها $4! = 24$ ومن ثم حذف التبديلات التي يكون فيها A هو الحرف الأول (أي أن A يستلم رسالته)، B هو الحرف الثاني، C هو الحرف الثالث، D هو الحرف الرابع لنحصل على التبديلات المطلوبة وهي

$$\begin{array}{ccc} BADC & BDAC & BCDA \\ CADB & CDAB & CDBA \\ DABC & DCAB & DCBA \end{array}$$

وعددها 9. ◇

ملحوظة

المثال (١٧) هو حالة خاصة من نوع من التبديلات التي تسمى التبديلات التامة (derangements) والتي تعرف على النحو التالي: التبديل التام للعناصر $1, 2, 3, \ldots, n$ هو تبديل لهذه العناصر بحيث لا يظهر أي من هذه العناصر في مكانه الأصلي. على سبيل المثال، 23514 تبديل تام للعناصر 12345 ولكن 23541 ليس تبديلاً تاماً لهذه العناصر. من المعلوم أن عدد التبديلات التامة لعناصر عددها n هو

$$n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right].$$

بتطبيق هذه الصيغة على المثال (١٨) نجد أن المطلوب في المثال هو عدد التبديلات التامة لأربعة عناصر وهو $9 = 4!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right]$.

مثال (١٨) في أسبوع الحذف والإضافة للفصل الدراسي الأول طلب 15 طالباً

إضافة مقرر التكامل إلى جدولهم الدراسي. وبعد النظر إلى الفرص المتاحة لهم لاحظ مسجل الكلية وجود أربع شعب من المقرر غير مكتملة، الأولى تستطيع استيعاب 3 طلاب والثانية 4 طلاب والثالثة طالبين والرابعة 6 طلاب. كم عدد الطرق الممكنة التي يستطيع أن يسجل فيها الطلاب المقرر؟

الحل

عدد طرق الممكنة هو عدد التبديلات المختلفة لمجموعة عدد عناصرها 15 من أربعة أنماط n_1 ، n_2 ، n_3 ، n_4 حيث $n_1 = 3$ ، $n_2 = 4$ ، $n_3 = 2$ ، $n_4 = 6$. هذا العدد:

$$\frac{15!}{3!\times 4!\times 2!\times 6!} = 6306300.$$ ◇

مثال (١٩) [AIME #2 1992] نقول إن العدد المكون من خمس مراتب $ABCDE$ تزايدي إذا كان $A < B < C < D < E$. كم عدد الأعداد التزايدية المكونة من خمس مراتب؟

الحل

لاحظ أولاً أن العدد التزايدي لا يحتوي أي مرتبة صفرية لأن $A \neq 0$ وأن كل مرتبة بعد ذلك أكبر من A . عدد طرق اختيار 5 مراتب غير صفرية مختلفة هو

$$C(9,5) = \frac{9!}{4!\times 5!} = 126.$$

وهذا هو العدد المطلوب لأنه يمكن ترتيب أي خمس مراتب غير صفرية مختلفة ترتيباً تزايدياً بطريقة واحدة فقط. ◇

استراتيجية عامة لحل مسائل التباديل والتوافيق

[General Strategy For Solving Permutation and Combination Problems]

من المهم جداً لأجل النجاح في حل مسائل التباديل والتوافيق أن يميز الطالب نمط المسألة، هل هي مسألة تباديلأم مسألة توافيق لأن الكثير من الطلاب يتناول مسألة التباديل على أنها مسألة توافيق أو العكس. بعد ذلك يقوم الطالب بالاستعانة بالصيغة المناسبة لحل المسألة. الأسئلة التالية تساعد الطالب على تمييز نمط المسألة:

(١) هل المسألة هي مسألة تباديل أم توافيق؟

إن اختبار ترتيبين نمطيين لنفس العناصر يساعد الطالب على تحديد نوع المسألة. إذا حسبنا الترتيبين على أنهما خيار واحد فمعنى ذلك أن المسألة هي مسألة توافيق وما عدا ذلك فهي مسألة تباديل. لتوضيح ذلك، إذا سئلت عن ترتيبات الحروف A، B، Cفإن ABC و ACB يعدان ترتيبين مختلفين. ولذا فالمسألة هي مسألة تباديل. أما إذا سئلت عن عدد طرق اختيار ثلاثة أعداد من بين الأعداد $1,2,3,4,5,6$ دون الاهتمام بالترتيب الذي تختار به هذه الأعداد فإن المسألة هي مسألة توافيق. لاحظ أيضاً أن بعض المسائل تتطلب ضمنياً الترتيب دون أن تنص صراحة على ذلك، ولذا فهذه المسائل هي مسائل تباديل، على سبيل المثال، 4 مراتب تكون عدداً مكوناً من أربع مراتب. هنا العدد المكون من أربع مراتب يتضمن ترتيباً لأن العدد 1234 يختلف عن العدد 1324.

المسائل التي تتضمن ترتيبات جزئية هي مسائل تباديل، فمثلاً، إذا أردت وضع ثلاثة كتب رياضيات وأربعة كتب فيزياء على رف بحيث تكون

الكتب من كل نوع متلاصقة هي مسألة تباديل.

في الأغلب، إذا تضمنت المسألة كلمة "ترتيب" فهي مسألة تباديل وإذا تضمنت كلمة "اختيار" فهي مسألة توافيق.

(٢) هل التكرار مسموح؟

يجب قراءة المسألة جيداً لتعرف إذا كان تكرار العناصر مسموحاً به أم لا، على سبيل المثال، إذا كانت المسألة عن أعضاء دول مجلس التعاون فمن الواضح هنا التكرار غير مسموح به، أما إذا كان لديك 5 مداخل لكلية العلوم فمن الممكن أن تدخل وتخرج من المدخل نفسه، ولذا فالتكرار هنا مسموح به ضمنياً.

(٣) هل هناك عناصر متشابهة في المجموعة؟

تفحص المجموعة المراد حساب تباديلها أو توافيقها فإذا احتوت على عناصر متشابهة احسبها أولاً، فمثلاً، إذا كانت المسألة هي إيجاد عدد ترتيبات حروف الكلمة $SUCCESS$ فهي كلمة تحتوي على 3 حروف S، حرفين C، حرف U، حرف E.

مسائل محلولة

(١) بكم طريقة مختلفة يمكن تكوين مجموعة جزئية تتكون من عنصرين فأكثر من مجموعة عدد عناصرها 5؟

(٢) جد عدد الكلمات التي يمكن الحصول عليها بترتيب حروف الكلمة $PENCILS$ بشرط:

(أ) أن يقع الحرف E بعد الحرف I.

(ب) أن يكون هناك حرفان بين E و I.

(٣) كم عدد الكلمات التي يمكن تكوينها من الحروف $ABCDEFG$ بحيث تكون الحروف A، B، C متجاورة؟

(٤) كم عدد الكلمات الثنائية (مراتبها 0 أو 1) من الطول 10 التي يمكن تكوينها بحيث يكون سبع من مراتبها يساوي 1؟

(٥) نريد تكوين لجنة من أربعة أشخاص من بين 6 أعضاء هيئة تدريس و 7 طلاب. بكم طريقة يمكن إنجاز ذلك بشرط أن تحتوي اللجنة على طالب واحد على الأقل؟

(٦) نريد تكوين لجنة من أربعة أشخاص من بين 6 أعضاء هيئة تدريس و 7 طلاب. بكم طريقة يمكن إنجاز ذلك بشرط أن لا يكون الطالب أحمد وعضو هيئة التدريس يوسف معاً في اللجنة؟

(٧) جد عدد الكلمات المختلفة التي يمكن تكوينها من ترتيب حروف الكلمة $ABCDE$ والتي لا تحتوي أياً من النمطين AB و CD.

(٨) بكم طريقة يمكن تجليس 5 مهندسين و 5 أطباء حول مائدة مستديرة بشرط أن لا يجلس مهندسان جوار بعضهما البعض؟

(٩) بكم طريقة يمكن تجليس 5 مهندسين و 8 أطباء في صف من المقاعد بحيث لا يجلس مهندسان بجانب بعضهما البعض؟

(١٠) يتكون أحد فصول مرحلة الروضة من 10 بنات و 10 أولاد. أرادت المعلمة تجليس الطلاب والطالبات على مقاعد في صف واحد بحيث لا يجلس ولدان أو بنتان في مقعدين متجاورين. كم عدد الطرق المختلفة لإنجاز ذلك؟

(١١) بكم طريقة يمكن ترتيب 3 كتب رياضيات وأربعة كتب كيمياء وخمسة كتب فيزياء على أحد رفوف مكتبة بشرط أن تكون كتب الموضوع الواحد بجانب بعضها البعض.

(١٢) بكم طريقة يمكن أن يجلس 6 أشخاص حول مائدة مستديرة بشرط أن لا يجلس أحمد بجانب عبدالعزيز؟

(١٣) تتكون أرقام لوحات السيارات في المملكة العربية السعودية من ثلاثة حروف مأخوذة من حروف اللغة الانجليزية متبوعة بأربعة أرقام. ما عدد لوحات السيارات التي لا تسمح بتكرار أي من الحروف وأي من الأرقام؟

(١٤) مجموعة من عشرة طلاب أرادوا الجلوس على طاولتين تتسع كل منهما لخمسة طلاب إحداهما دائرية والثانية مستطيلة الشكل ولكن يسمح فقط بالجلوس على ضلع واحد من أضلاعها.

(أ) كم عدد الطرق الممكنة لتجليس الطلاب؟

(ب) إذا كان سالم وسعد من ضمن المجموعة وأراد كل منهما الجلوس على طاولة مختلفة فكم يكون عدد الطرق في هذه الحالة؟

(١٥) لدى السيد عبدالرحمن 8 أبناء، أربعة أولاد وأربع بنات ولديهم مائدة مستديرة تتسع لثمانية أشخاص. بكم طريقة يمكن تجليس الأبناء حول المائدة

بحيث لا يتجاور ولدان؟

(١٦) كم عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$ ؟

(١٧) كم عدد الحلول الصحيحة للمعادلة

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$ حيث:

(أ) $x_1 \geq 10$ و $x_i \geq 0$ لكل $i = 2,3,4,5$.

(ب) $x_1 \leq 80$ و $x_i \geq 0$ لكل $i = 2,3,4,5$.

(ج) $10 \leq x_1 \leq 80$ و $x_i \geq 0$ لكل $i = 2,3,4,5$.

(١٨) أراد سلطان توزيع 100 حبة حلوى على إخوته الخمسة أحمد ومحمد وسعاد ونورة وهيفاء بحيث يأخذ أحمد على الأكثر 55 حبة ويأخذ محمد على الأكثر 65 حبة. بكم طريقة يمكن إنجاز ذلك؟

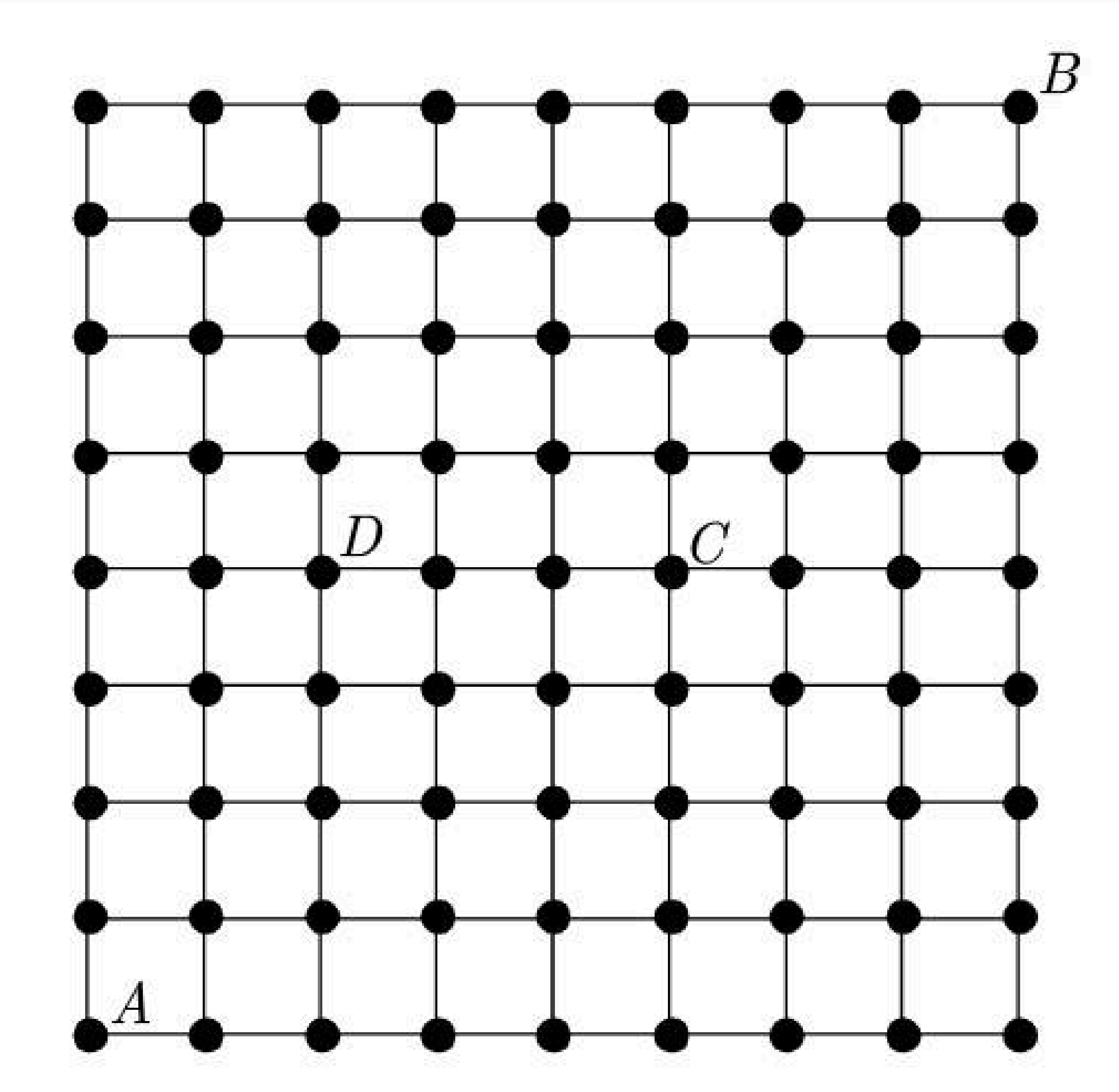
(١٩) كم عدد الأعداد الصحيحة N التي يمكن كتابتها كحاصل ضرب 10 أعداد مأخوذة من مجموعة الأعداد $\{3,5,7,11\}$ ؟

(٢٠) [Aust.MC 1983] اختبار رياضيات مكون من ست مسائل مرقمة من 1 إلى 6 . الدرجات التي يمكن الحصول عليها عند حل أي مسألة هي 0 أو 1 أو 2 أو 3 درجات. تقدم أحمد إلى الاختبار وحصل على درجة كلية تساوي 15 . ما عدد الطرق الممكنة للحصول على هذه الدرجة؟

(٢١) الشكل المبين أدناه شبكة من النوع 8×8 .

(أ) كم عدد المسارات من A إلى B التي تمر بالنقطة C حيث الخطوات المسموح بها إلى اليمين وإلى الأعلى فقط؟

(ب) كم عدد هذه المسارات التي لا تحتوي المسار CD ؟



(٢٢) [Aust.MC 1991] كم عدد الأعداد الصحيحة ABC التي بين العددين 100 و 999 حيث $A > B > C$ ؟

(٢٣) [Aust.MC 1991] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي أصغر من 1000 بحيث يكون مجموع مراتبها يساوي 6؟

(٢٤) [Aust.MC 1987] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من 4 مراتب غير صفرية مختلفة بحيث يكون مجموع المراتب يساوي 12؟

(٢٥) [Aust.MC 1985] بكم طريقة يمكن اختيار ثلاثة أعداد صحيحة موجبة مختلفة x و y و z حيث $1 \leq x \neq y \neq z \leq 30$ بحيث يكون مجموع هذه الأعداد مضاعفاً للعدد 3 والترتيب غير مهم؟

(٢٦) كم عدد الكلمات المختلفة التي يمكن تكوينها من حروف الكلمة $ASCENDENCE$ ؟

(٢٧) (AHSME 1993) كم عدد المثلثات التي يمكن تكوينها بحيث تكون رؤوسها من تقاطع شبكة نقاط من النوع 4×4 ؟

(٢٨) [TFAOC] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي أصغر من 500 والتي يمكن كتابتها كمجموع مكعبين كاملين؟

(٢٩) [AIME 2005] يمتلك أحمد 4 قطع نقدية متشابهة ذهبية اللون و 4 قطع نقدية متشابهة فضية اللون. أحد جانبي كل من هذه القطع صورة والجانب الآخر كتابة. ما عدد الطرق المختلفة لوضع هذه القطع واحدة فوق الأخرى بحيث لا تتلاصق صورتا قطعتين؟

(٣٠) [AIME 1990] علقنا 8 بالونات منفوخة على حائط بحيث تشكل 3 أعمدة، كل من العمود الأول والثاني يتكون من 3 بالونات والعمود الثالث يتكون من بالونين. المطلوب تنفيس البالونات باتباع الترتيب التالي:

(أ) نختار أولاً العمود المراد تنفيس أحد بالوناته.

(ب) نقوم بتنفيس البالون الواقع في أسفل العمود.

كم عدد الطرق الممكنة لتنفيس جميع البالونات؟

(٣١) [AIME 2004] نقول إن العدد المكون من أربع مراتب $ABCD$ عدد شبيه الأفعى إذا كان $A < B$ و $B > C$ و $C < D$. مثلاً كل من العددين 1324 و 1423 شبيه الأفعى. كم عدداً شبيه الأفعى مكوناً من أربع مراتب ؟

(٣٢) [AIME 1989] وضعنا عشر نقاط على محيط دائرة. كم عدد المضلعات المختلفة التي يمكن تكوينها باستخدام بعض أو جميع هذه النقاط كرؤوس؟

(٣٣) [TFAOC] أراد مزارع زرع 15 شتلة من الزهور في صف واحد داخل حديقة مترله. 10 من هذه الشتلات ورد جوري والخمس شتلات الباقية قرنفل. بكم طريقة يمكنه إنجاز ذلك بشرط أن لا تكون شتلتان من القرنفل متجاورتين؟

(٣٤) [TFAOC] وعاء يحتوي على 10 حبات من حلوى MM و 5 حبات من حلوى الهيرشي. سقط الوعاء على الأرض وتناثرت منه الحلوى وتراكض 8 أطفال للحصول على هذه الحلوى. كم عدد طرق توزيع حبات الحلوى على الأطفال ؟

(٣٥) [Math counts 1985] ما مرتبة آحاد المجموع

$1! + 2! + 3! + \cdots + 14! + 15!$؟

(٣٦) [MAΘ 1990] لدينا 5 مستقيمات ودائرتان في المستوى. ما أكبر عدد ممكن من النقاط الذي نحصل عليه من تقاطعات الأشكال السبعة؟

(٣٧) [MAΘ 2011] يمتلك أحمد 8 قمصان و 6 بنطلونات و 10 أزواج من الجوارب. في صباح يوم بارد قرر أحمد قبل خروجه إلى المدرسة أن يلبس قميصين وثلاثة أزواج من الجوارب وبنطلوناً واحداً. كم عدد الخيارات المختلفة المتاحة لأحمد؟

(٣٨) [MAΘ 2011] رسم أحمد 15 قطعة مستقيمة من الطول نفسه بعضها مواز لعرض الورقة والبعض الآخر موازلطول الورقة. ما أكبر عدد من المستطيلات التي يمكن تكوينها باستخدام هذه القطع المستقيمة ؟

(٣٩) [MAΘ 2011] ما عدد الحلول الصحيحة الموجبة للمعادلة $a + b + 2c = 35$؟

(٤٠) [MAΘ 2010] لدى محمد خمسة مفاتيح مختلفة. إذا كان A هو عدد طرق ترتيبها في صف واحد و B عدد طرق ترتيبها حول دائرة و C هو عدد طرق وضعها في علاقة مفاتيح فما قيمة $\frac{A}{B} + \frac{B}{C}$؟

(٤١) [AHSME 1994] في الحفل الختامي للنشاط المدرسي وضعت 9 مقاعد في الصف الأول ليجلس عليها 3 مدرسين و 6 من طلاب المدرسة المتميزين. إذا أردنا تجليس كل من المدرسين بين طالبين فبكم طريقة يمكن إنجاز ذلك؟

(٤٢) [AMC12A 2003] بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة مكونة من 5 حروف A و 5 حروف B وخمسة حروف C بحيث لا تحتوي الحرف A في الخمسة أماكن الأولى ولا تحتوي الحرف B في الخمسة أماكن الثانية ولا تحتوي الحرف C في الخمسة أماكن الأخيرة ؟

(٤٣) [AIME 2010] تتكون كلية العلوم الرياضية في إحدى الجامعات الصغيرة من ثلاثة أقسام هي الرياضيات، الاحصاء، الحاسب الآلي. في كل من هذه الأقسام يوجد أربعة أعضاء هيئة تدريس، رجلان وامرأتان. نريد تكوين لجنة من 6 أعضاء هيئة تدريس، ثلاثة رجال وثلاث نساء على أن تحتوي هذه اللجنة على عضوين من كل من الأقسام الثلاثة. ما عدد اللجان التي يمكن تكوينها بهذه الشروط؟

(٤٤) [MAΘ 2008] كم عدد التبديلات المكونة من ثلاثة حروف مأخوذة من الكلمة $SACRAMENTO$؟

(٤٥) [MAΘ 2008] نريد الوصول من نقطة الأصل $(0,0)$ في المستوى الإحداثي إلى النقطة $(4,4)$ بحيث تكون الخطوة، التحرك وحدة إلى اليمين أو اليسار أو الأعلى أو الأسفل. على سبيل المثال، يمكن أن تكون الخطوة من $(0,0)$ هي التحرك إلى $(1,0)$ أو $(0,1)$ أو $(-1,0)$ أو $(0,-1)$.
ما عدد المسارات الممكنة من $(0,0)$ إلى $(4,4)$ المكونة من عشر خطوات؟

(٤٦) [MAΘ 2008] كم عدد طرق توزيع 10 بالونات متشابهة على أحمد، بدر،

جمال بحيث لا يشترط أن يأخذ أحدهم أياً من البالونات؟

(٤٧) [MAΘ 2008] إذا كانت العشرة بالونات في المسألة (٤٦) ملونة بثلاثة ألوان: 3 بالونات لونها أحمر، 3 بالونات لونها أصفر، 4 بالونات لونها أزرق فما عدد الطرق الممكنة لتوزيعها على الأطفالالثلاثة؟

(٤٨) [MAΘ 2008] وضعت خمسة مقاعد في صف واحد وخصص مقعد واحد لكل من المدرسين الخمسة للجلوس عليه. عند وصول المدرسين لم يلتزموا بالجلوس على المقاعد المخصصة لكل منهم ولكنهم قاموا بالجلوس عشوائياً على هذه المقاعد. كم عدد الطرق الممكنة لجلوس المدرسين بحيث يجلس اثنان فقط منهم على المقعدين المخصصة لهما؟

(٤٩) [MAΘ 2008] لدينا 5 كرات نريد توزيعها على أربعة صناديق A، B، C، D يتسع كل منها لكرتين على الأكثر. كم عدد الطرق الممكنة لتوزيع هذه الكرات على الصناديق الأربعة؟

(٥٠) [MAΘ 2008] عدد ترتيبات حروف الكلمة $AABBCC$ هو $\dfrac{6!}{2!\times 2!\times 2!} = 90$. كم عدد الترتيبات من بينها التي تحتوي الكلمة ABC؟

(٥١) نريد اختيار لجنة مكونة من 4 أعضاء هيئة تدريس ومقرر لها من بين 15 عضو هيئة تدريس. كم عدد الطرق الممكنة لاختيار هذه اللجنة؟

(٥٢) أراد 14 شخصاً الذهاب إلى البر باستخدام ثلاث سيارات، سيارة جيب تتسع لسبعة أشخاص وسيارة صالون تتسع لخمسة أشخاص وسيارة رياضية تتسع لثلاثة أشخاص. بكم طريقة يمكنهم ركوب السيارات؟

(٥٣) [PACAT] أردنا تجليس 20 شخصاً بينهم أخوان على طاولة دائرية بحيث يجلس شخص واحد بين الأخوين. ما عدد الطرق الممكنة لإنجاز ذلك؟

(٥٤) [PACAT] نريد تكوين لجنة تحتوي على 3 أشخاص من بين 6 أطباء و 4 ممرضين. إذا رفض الممرض A أن ينضم إلى اللجنة التي تحتوي الطبيب B، بينما الطبيب B يقبل أن يكون ضمن اللجنة فقط إذا احتوت اللجنة الممرض C فما عدد اللجان الممكن تكوينها؟

(٥٥) [PACAT] في سباق للخيل تتنافس 6 أحصنة بينها الحصانان A و B. كم عدد الترتيبات الممكنة لوصول الأحصنة الستة إلى خط النهاية بشرط أن يصل A دائماً قبل B؟

(٥٦) بكم طريقة يمكن ترتيب حروف الكلمة $MAROUF$ بشرط أن لا يكون الحرفان M و F متجاورين؟

(٥٧) كم عدد طرق وقوف 4 أطفال وأمهاتهم في طابور بحيث يقف الطفل دائما أمام والدته؟

(٥٨) [PACAT] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة n التي تزيد عن 6000000 ومراتبها هي الأعداد $3, 4, 4, 5, 6, 6, 7$؟

(٥٩) [AMC122007] يقال إن مجموعة من الأعداد الصحيحة مميزة إذا كانت لا تحوي أكثر من عدد من أي ثلاثة أعداد موجبة متتابعة. كم عدد المجموعات الجزئية المميزة من $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ (بما فيها المجموعة الخالية)؟

(٦٠) أراد صلاح توزيع 9 قطع حلوى على إخوته الأربعة. بكم طريقة يمكنه عمل

ذلك بشرط أن يعطي كل واحد قطعة على الأقل؟

حلول المسائل

(١) بكم طريقة مختلفة يمكن تكوين مجموعة جزئية تتكون من عنصرين فأكثر من مجموعة عدد عناصرها 5؟

الحل

عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين هو $10 = \frac{5!}{2! \times 3!} = C(5,2)$.

عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر هو $10 = \frac{5!}{2! \times 3!} = C(5,3)$.

عدد المجموعات الجزئية المكونة من أربعة عناصر هو $5 = \frac{5!}{4! \times 1!} = C(5,4)$.

عدد المجموعات الجزئية المكونة من خمسة عناصر هو $1 = \frac{5!}{5! \times 0!} = C(5,5)$.

إذن، عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين فأكثر هو

$$10 + 10 + 5 + 1 = 26.$$

أو يمكن إيجاد عدد المجموعات الجزئية من مجموعة مكونة من خمسة عناصر وطرح عدد المجموعات الجزئية الخالية والمكونة من عنصر واحد لنحصل على العدد المطلوب وهو $26 = 1 - 5 - 2^5$.

(٢) جد عدد الكلمات التي يمكن الحصول عليها بترتيب حروف الكلمة $PENCILS$ بشرط:

(أ) أن يقع الحرف E بعد الحرف I.

(ب) أن يكون هناك حرفان بين E و I.

الحل

(أ) لاحظ أن الحرف E لا يمكن أن يكون أول حروف الكلمة. وبهذا يكون لدينا الحالات التالية:

الحالة الأولى: $_E_____$. في هذه الحالة I يجب أن يكون الحرف الأول ويمكن ترتيب الخمسة حروف الباقية على يمين E بعدد من الطرق يساوي $5!$.

الحالة الثانية: $__E____$. هناك خياران للحرف I (الحرف الأول أو الثاني) والحروف الخمسة الباقية يمكن ترتيبها بعدد من الطرق يساوي $5!$. إذن، عدد طرق هذه الحالة هو $2\times 5!$.

الحالة الثالثة: $___E___$. يوجد ثلاثة خيارات لوضع الحرف I قبل E. وبهذا عدد طرق هذه الحالة هو $3\times 5!$.

الحالة الرابعة: $____E__$. يوجد أربعة خيارات للحرف I ومن ثم عدد طرق هذه الحالة هو $4\times 5!$.

الحالة الخامسة: $_____E_$. يوجد خمسة خيارات للحرف I ويكون عدد طرق هذه الحالة هو $5\times 5!$.

الحالة السادسة: $______E$. في هذه الحالة جميع الحروف الستة (ومن ثم I) قبل الحرف E ويمكن ترتيبها بعدد من الطرق يساوي $6\times 5! = 6!$. إذن عدد الطرق هو

$$(1+2+3+4+5+6)\times 5! = 21\times 120 = 2520.$$

لاحظ أنه يمكن حل هذه المسألة بطريقة أسهل على النحو التالي: عدد طرق ترتيب حروف كلمة مكونة من 7 حروف مختلفة هو $7!$. في كل كلمة من هذه الكلمات إما أن يكون الحرف E قبل الحرف I أو الحرف I قبل الحرف E. أي

أن الحرف I يكون قبل الحرف E في نصف هذه الكلمات ويكون العدد المطلوب هو $2520 = \frac{7!}{2}$.

(ب) في هذه الحالة إما أن يقع I قبل E وبينهما حرفان أو أن يقع E قبل I وبينهما حرفان. ولهذا فلدينا خياران هنا ويكفي الآن أن نجد عدد طرق الحالة التي يقع فيها I قبل E وبينهما حرفان. لكي يتحقق ذلك فإن الحرف E لا يمكن أن يكون الحرف الأول أو الثاني أو الثالث. وبهذا فهو الحرف الرابع أو الخامس أو السادس أو السابع ويكون I هو الحرف الأول أو الثاني أو الثالث أو الرابع كما هو موضح أدناه

$$I__E___ \text{ ، } _I__E__ \text{ ، } __I__E_ \text{ ، } ___I__E.$$

في كل من هذه الحالات يمكن ترتيب الحروف الخمسة الباقية بعدد يساوي $5!$.
إذن، عدد الطرق يساوي $4\times 5! + 4\times 5! = 8\times 120 = 960$.

(٣) كم عدد الكلمات التي يمكن تكوينها من الحروف $ABCDEFG$ بحيث تكون الحروف A ، B ، C متجاورة؟

الحل

يمكن ترتيب الحروف A ، B ، C بحيث تكون متجاورة بعدد من الطرق يساوي $3!$. الآن، باعتبار ABC حرفاً واحداً يكون المطلوب بعد ذلك إيجاد عدد ترتيبات خمسة حروف $\boxed{ABC}\ D\ E\ F\ G$. وهذا العدد يساوي $5!$. إذن العدد الكلي للترتيبات المطلوبة هو $3!\times 5! = 6\times 120 = 720$.

(٤) كم عدد الكلمات الثنائية (مراتبها 0 أو 1) من الطول 10 التي يمكن تكوينها بحيث تكون سبع من مراتبها تساوي 1؟

الحل

تتحدد الكلمة تماماً بمعرفة أي من مراتبها تساوي 1. أي أن المطلوب هنا هو إيجاد عدد طرق اختيار 7 عناصر من مجموعة مكونة من 10 عناصر. وبهذا يكون عدد الطرق يساوي $C(10,7) = \dfrac{10!}{7! \times 3!} = 120$.

(٥) نريد تكوين لجنة من أربعة أشخاص من بين 6 أعضاء هيئة تدريس و 7 طلاب. بكم طريقة يمكن إنجاز ذلك بشرط أن تحتوي اللجنة على طالب واحد على الأقل؟

الحل

عدد طرق اختيار لجنة من أربعة أشخاص من بين 13 شخصاً يساوي $C(13,4)$. عدد طرق اختيار اللجنة من أعضاء هيئة التدريس فقط يساوي $C(6,4)$. إذن، عدد طرق اختيار لجنة تحتوي على طالب واحد على الأقل هو

$$C(13,4) - C(6,4) = \frac{13!}{4! \times 9!} - \frac{6!}{4! \times 2!} = 715 - 15 = 700 .$$

(٦) نريد تكوين لجنة من أربعة أشخاص من بين 6 أعضاء هيئة تدريس و 7 طلاب. بكم طريقة يمكن إنجاز ذلك بشرط أن لا يكون الطالب أحمد وعضو هيئة التدريس يوسف معاً في اللجنة؟

الحل

إذا كان الطالب أحمد وعضو هيئة التدريس يوسف في اللجنة معاً فإن عدد طرق اختيار الشخصين الآخرين هو $C(11,2)$. إذن، عدد طرق اختيار أعضاء اللجنة في هذه الحالة هو $C(13,4) - C(11,2) = 715 - 55 = 660$.

(٧) جد عدد الكلمات المختلفة التي يمكن تكوينها من ترتيب حروف الكلمة $ABCDE$ والتي لا تحتوي أياً من النمطين AB و CD.

الحل

عدد ترتيبات حروف الكلمة $ABCDE$ هو $5!$. لنفرض الآن أن مجموعة الترتيبات التي تحتوي النمط AB هي Y وأن مجموعة الترتيبات التي تحتوي النمط CD هي Z. إذن، عدد الكلمات التي لا تحتوي أياً من النمطين AB و CD هو $5!-\left|Y \cup Z\right|$. ولكن استناداً إلى مبدأ التضمين والإقصاء لدينا

$$\left|Y \cup Z\right| = \left|Y\right| + \left|Z\right| - \left|Y \cap Z\right|$$

عدد كلمات Y هو عدد ترتيبات كلمة مكونة من أربعة حروف (على اعتبار أن AB حرف واحد) وهذا العدد يساوي $4!$. وبالمثل، عدد كلمات Z هو $4!$. وعدد كلمات $Y \cap Z$ هو $3!$ (على اعتبار أن AB حرف واحد و CD حرف واحد والحرف الثالث هو E) إذن، العدد المطلوب هو

$$5!-4!-4!+3! = 120 - 24 - 24 + 6 = 78.$$

(٨) بكم طريقة يمكن تجليس 5 مهندسين و 5 أطباء حول مائدة مستديرة بشرط أن لا يجلس مهندسان جوار بعضهما البعض؟

الحل

عدد طرق تجليس الأطباء حول المائدة يساوي $4!$. الآن، يمكن أن يجلس أي مهندس بين أي طبيبين. أي يوجد خمسة خيارات للمهندس الأول، أربعة خيارات للمهندس الثاني، ثلاثة خيارات للمهندس الثالث، خياران للمهندس الرابع وخيار واحد للمهندس الخامس. إذن، عدد طرق تجليس المهندسين هو $5!$. ويكون عدد طرق تجليس العشرة أشخاص بالنمط المطلوب هو

$.4! \times 5! = 24 \times 120 = 2880$

(٩) بكم طريقة يمكن تجليس 5 مهندسين و 8 أطباء في صف من المقاعد بحيث لا يجلس مهندسان بجانب بعضهما البعض؟

الحل

نقوم بتجليس 8 أطباء أولاً في صف واحد بعدد من الطرق يساوي $8!$. الآن، عدد طرق تجليس المهندس الأول يساوي 9 (إما أن يجلس في المقعد الأول أو الأخير أو بين أي طبيبين). ولذا يتبقى 8 خيارات للمهندس الثاني، 7 خيارات للمهندس الثالث، 6 خيارات للمهندس الرابع، 5 خيارات للمهندس الخامس. إذن، عدد طرق تجليس الأطباء والمهندسين بالشرط المطلوب هو $8! \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$.

(١٠) يتكون أحد فصول مرحلة الروضة من 10 بنات و 10 أولاد. أرادت المعلمة تجليس الطلاب والطالبات على مقاعد في صف واحد بحيث لا يجلس ولدان أو بنتان في مقعدين متجاورين. كم عدد الطرق المختلفة لإنجاز ذلك؟

الحل

يوجد خياران للمقعد الأول، إما أن يجلس عليه ولد أو أن يجلس عليه بنت. لكل من هذين الخيارين يمكن تجليس الطلاب والطالبات بعدد من الطرق يساوي $10! \times 10!$. إذن، عدد الطرق المطلوب هو $2(10!)^2$.

(١١) بكم طريقة يمكن ترتيب 3 كتب رياضيات وأربعة كتب كيمياء وخمسة كتب فيزياء على أحد رفوف مكتبة بشرط أن تكون كتب الموضوع الواحد بجانب بعضها البعض.

الحل

طرق ترتيب 3 كتب رياضيات هو $3!$.

طرق ترتيب 4 كتب كيمياء هو $4!$.

طرق ترتيب 5 كتب فيزياء هو $5!$.

أيضاً، نحتاج إلى $3!$ طريقة لترتيب المواضيع الثلاثة. إذن، عدد الطرق الكلي هو

$3! \times 3! \times 4! \times 5!$.

(١٢) بكم طريقة يمكن أن يجلس 6 أشخاص حول مائدة مستديرة بشرط أن لا يجلس أحمد بجانب عبدالعزيز؟

الحل

عدد طرق تجليس 6 أشخاص حول مائدة مستديرة يساوي $5!$. الآن، إذا جلس أحمد بجانب عبدالعزيز فإما أن يكون أحمد على يمين عبدالعزيز أو على يساره. ولذا يوجد خياران هنا. نفرض أن أحمد وعبدالعزيز جلسا متجاورين. إذن، يمكن اعتبار الستة أشخاص، خمسة أشخاص ويمكن تجليسهم بعدد من الطرق يساوي $4!$.

إذن، عدد الطرق المطلوب هو $5! - 2 \times 4! = 120 - 48 = 72$.

(١٣) تتكون أرقام لوحات السيارات في المملكة العربية السعودية من ثلاثة حروف مأخوذة من حروف اللغة الانجليزية متبوعة بأربعة أرقام. ما عدد لوحات السيارات التي لا تسمح بتكرار أي من الحروف وأي من الأرقام؟

الحل

المسألة هنا هي إيجاد عدد التبديلات من السعة 3 مأخوذة من مجموعة

عدد عناصرها 26 وعدد التبديلات من السعة 4 مأخوذة من مجموعة عدد عناصرها 10. هذان العددان هما $P(26,3)$ و $P(10,4)$. إذن، عدد اللوحات هو

$$P(26,3) \times P(10,4) = \frac{26!}{23!} \times \frac{10!}{6!} = 78624000 \, .$$

(١٤) مجموعة من عشرة طلاب أرادوا الجلوس على طاولتين تتسع كل منهما لخمسة طلاب، إحداهما دائرية والثانية مستطيلة الشكل ولكن يسمح فقط بالجلوس على ضلع واحد من أضلاعها.

(أ) كم عدد الطرق الممكنة لتجليس الطلاب؟

(ب) إذا كان سالم وسعد من ضمن المجموعة وأراد كل منهما الجلوس على طاولة مختلفة فكم يكون عدد الطرق في هذه الحالة؟

الحل

(أ) عدد طرق اختيار مجموعة مكونة من 5 طلاب من مجموعة مكونة من عشرة طلاب وتجليسهم على إحدى الطاولتين يساوي $C(10,5)$. الآن، يمكن تجليس خمسة طلاب على دائرة بعدد من الطرق يساوي $4!$ ويمكن تجليس الخمسة الآخرين على ضلع واحد من مائدة مستطيلة بعدد من الطرق يساوي $5!$. إذن، عدد طرق تجليسهم هو

$$C(10,5) \times 4! \times 5! = \frac{10!}{5! \times 5!} \times 4! \times 5! = 725760 \, .$$

(ب) في هذه الحالة يمكن اختيار سالم وسعد بطريقتين ليجلسا على طاولتين مختلفتين ومن ثم اختيار أربعة طلاب لتجليسهم على إحدى الطاولتين بعدد من الطرق يساوي $C(8,4)$. وبهذا يكون العدد الكلي هو

$$.2 \times C(8,4) \times 4! \times 5! = \frac{2 \times 8!}{4! \times 4!} \times 4! \times 5! = 403200$$

(١٥) لدى السيد عبدالرحمن 8 أبناء، أربعة أولاد وأربع بنات ولديهم مائدة مستديرة تتسع لثمانية أشخاص. بكم طريقة يمكن تجليس الأبناء حول المائدة بحيث لا يتجاور ولدان ؟

الحل

نقوم بتجليس البنات أولاً حول المائدة بعدد من الطرق يساوي $3!$. بعد ذلك يوجد $4!$ من الطرق لتجليس الأولاد بين البنات. إذن، عدد طرق تجليس الأبناء الثمانية هو $3! \times 4! = 144$.

(١٦) كم عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$ ؟

الحل

بوضع ثلاثة أشرطة لفصل المتغيرات و 11 نجمة لتمثيل العدد 11 بين هذه الأشرطة نجد أن عدد الحلول الصحيحة غير السالبة يساوي $C(14,11) = \frac{14!}{11! \times 3!} = 364$.

(١٧) كم عدد الحلول الصحيحة للمعادلة

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$ حيث:

(أ) $x_1 \geq 10$ و $x_i \geq 0$ لكل $i = 2,3,4,5$.

(ب) $x_1 \leq 80$ و $x_i \geq 0$ لكل $i = 2,3,4,5$.

(ج) $10 \leq x_1 \leq 80$ و $x_i \geq 0$ لكل $i = 2,3,4,5$.

الحل

(أ) بوضع $y_1 = x_1 - 10$ يكون المطلوب إيجاد عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100 - 10 = 90$.

وهذا العدد يساوي $C(94,4) = \frac{94!}{4! \times 90!} = 3049501$.

(ب) يمكن حساب عدد الحلول هذه على النحو التالي:

نحسب أولاً عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$$

فنجد أن هذا العدد هو $C(104,4)$. الآن، نجد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$ حيث $x_1 \geq 81$ و $x_i \geq 0$ لكل $i = 2,3,4,5$. بوضع $y_1 = x_1 - 81$ يكون المطلوب هو عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة

$$y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100 - 81 = 19$$

وهذا العدد يساوي $C(23,4)$.

الآن، عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$ حيث $x_1 \leq 80$ و $x_i \geq 0$ لكل $i = 2,3,4,5$ هو

$$C(104,4) - C(23,4) = 27588756 - 53130 = 27536626$$

(ج) لنفرض الآن أن A هو عدد الحلول حيث $x_1 \geq 10$ وأن B هو عدد الحلول حيث $x_1 \geq 81$. عندئذ، عدد الحلول المطلوب هو العدد

$$A - B = C(94,4) - C(23,4) = 3049501 - 53130 = 2996371$$

(١٨) أراد سلطان توزيع 100 حبة حلوى على إخوته الخمسة أحمد ومحمد

وسعاد ونورة وهيفاء بحيث يأخذ أحمد على الأكثر 55 حبة ويأخذ محمد على الأكثر 65 حبة. بكم طريقة يمكن إنجاز ذلك؟

الحل

لنفرض أن حصص أحمد ومحمد وسعاد ونورة وهيفاء هي x_1، x_2، x_3، x_4، x_5 على التوالي. إذن، المطلوب هو إيجاد عدد حلول المعادلة $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$ حيث $x_1 \leq 55$ و $x_2 \leq 65$ و $x_i \geq 0$ ، $i = 3,4,5$. لنفرض أن D هي مجموعة الحلول غير السالبة للمعادلة. عندئذ، $\left|D\right| = C(104,4)$. لنفرض الآن أن A و B هما مجموعتا الحلول حيث $x_1 \geq 56$ و $x_2 \geq 66$ على التوالي وأن C هي مجموعة الحلول المطلوبة. بما أن $A \cap B = \phi$ فنجد أن

$$\left|C\right| = \left|D\right| - \left|A\right| - \left|B\right| = C(104,4) - C(48,4) - C(38,4).$$

(١٩) كم عدد الأعداد الصحيحة N التي يمكن كتابتها كحاصل ضرب 10 أعداد مأخوذة من مجموعة الأعداد $\{3,5,7,11\}$ ؟

الحل

لنفرض أن C_1، C_2، C_3، C_4 هي الأعداد 3، 5، 7، 11 على التوالي في حاصل الضرب. عندئذ، المطلوب هو عدد طرق توزيع 10 أشياء متشابهة إلى أربع أنماط مختلفة. هذا العدد يساوي $C(13,3) = \dfrac{13!}{3! \times 10!} = 286$.

(٢٠) [Aust.MC 1983] اختبار رياضيات مكون من ست مسائل مرقمة من 1 إلى 6 . الدرجات التي يمكن الحصول عليها عند حل أي مسألة هي 0 أو 1 أو 2 أو 3 درجات. تقدم أحمد إلى الاختبار وحصل على درجة كلية

تساوي 15. ما عدد الطرق الممكنة للحصول على هذه الدرجة؟

الحل

لنفرض أن الدرجات التي يمكن الحصول عليها للأسئلة الستة هي x_1، x_2، x_3، x_4، x_5، x_6 على التوالي. إذن، المطلوب هو إيجاد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15$ حيث $3 \leq x_i \leq 0$ لكل $i = 1, \ldots, 6$. ندرس الحالات الممكنة لعدد الأسئلة التي تكون درجتها 3. يمكن أن يتحقق ذلك إذا إجاب أحمد على 3 أو 4 أو 5 أسئلة درجة كل منها 3.

الحالة الأولى: عدد هذه الأسئلة هو 3. في هذه الحالة يحصل أحمد على 9 درجات لإجابته على ثلاثة أسئلة درجة كل منها 3 ويتبقى ست درجات للثلاثة أسئلة الباقية. ولكي يكون المجموع 15 فيجب أن تكون درجة كل من الثلاثة أسئلة المتبقية هي 2 وهذه يتم اختيارها بطريقة واحدة. إذن، عدد الطرق في هذه الحالة هو

$$C(6,3) = \frac{6!}{3! \times 3!} = 20 .$$

الحالة الثانية: عدد هذه الأسئلة هو 4. في هذه الحالة يحصل أحمد على 12 درجة لإجابته على أربعة أسئلة درجة كل منها 3 ويبقى 3 درجات للسؤالين الآخرين. أي درجة أحد الأسئلة هي 1 ودرجة الآخر هي 2. يوجد 6 خيارات للسؤال الذي درجته 1 ومن ثم خمسة خيارات للسؤال الذي درجته 2. وبهذا يكون عدد طرق هذه الحالة هو $6 \times 5 = 30$.

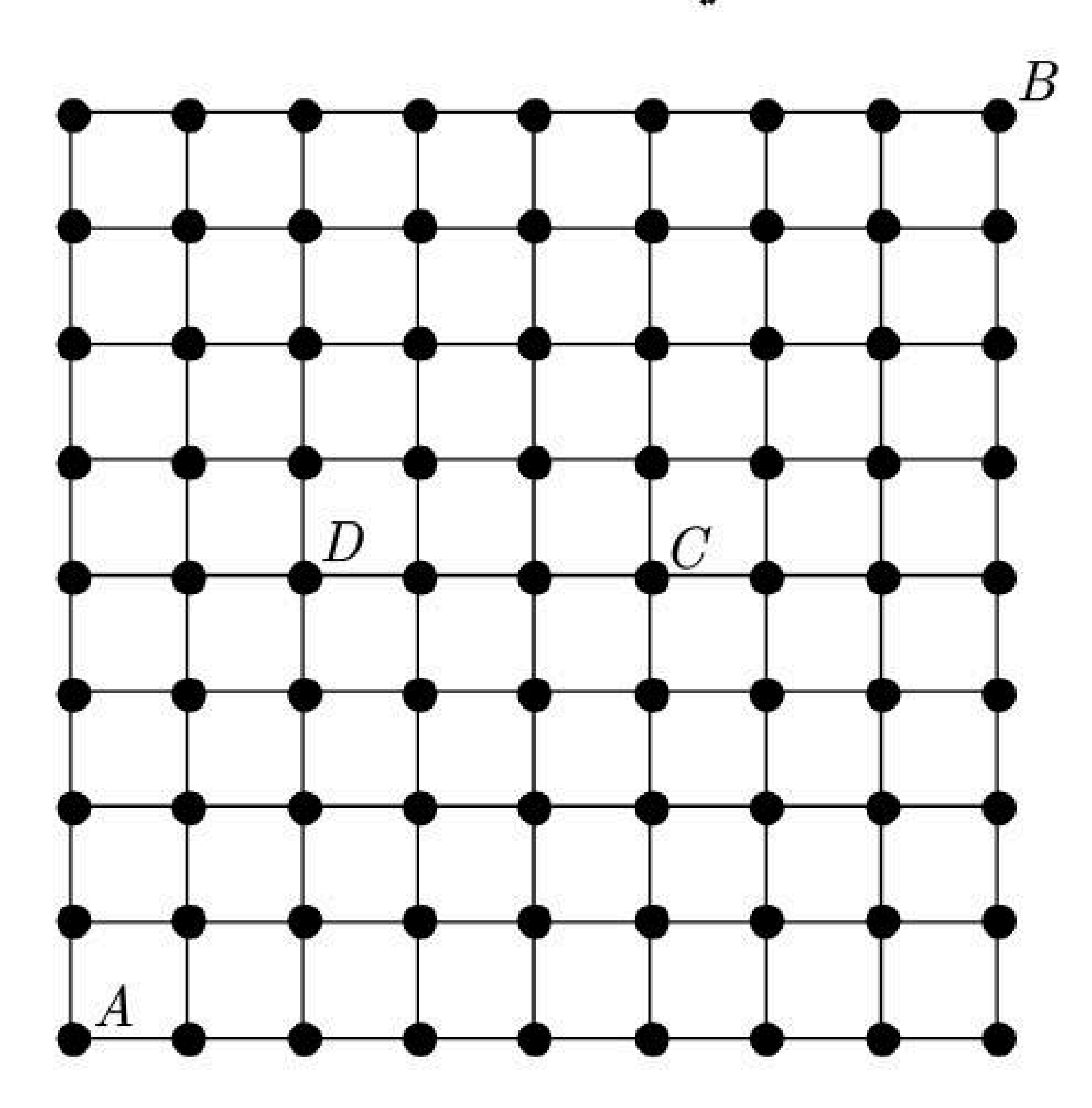
الحالة الثالثة: عدد هذه الأسئلة هو 5. في هذه الحالة يحصل أحمد على 15 درجة

وتكون درجة السؤال المتبقي هي صفر. عدد طرق هذه الحالة هو $C(6,5) = \frac{6!}{5! \times 1!} = 6$. إذن، عدد الطرق الكلي هو $20 + 30 + 6 = 56$.

(٢١) الشكل المبين أدناه شبكة من النوع 8×8.

(أ) كم عدد المسارات من A إلى B التي تمر بالنقطة C حيث الخطوات المسموح بها إلى اليمين وإلى الأعلى فقط؟

(ب) كم عدد هذه المسارات التي لا يكون المسار CD جزءاً منها؟



الحل

(أ) المسار على الشبكة مروراً بالنقطة C سيقسم إلى جزأين الأول، من النقطة A إلى النقطة C، أي شبكة من النوع 4×5 والثاني من النقطة C إلى النقطة B وهو شبكة من النوع 3×4. وبالتالي عدد المسارات الممكنة للجزء الأول يساوي

$126 = \dfrac{9!}{4! \times 5!}$ وعدد المسارات للثاني $35 = \dfrac{7!}{3! \times 4!}$. وبالتالي من مبدأ الضرب نجد أن عدد المسارات من A إلى B والتي تمر في C يساوي $35 \times 126 = 4410$.

(ب) من الأسهل حساب عدد المسارات التي سيكون المسار DC جزءاً منها وعددها يساوي $630 = \dfrac{7!}{3! \times 4!} \times \dfrac{6!}{2! \times 4!}$. بطرح هذا العدد من عدد المسارات الكلي نحصل على المطلوب وهو $14385 = 15015 - 630 = \dfrac{16!}{8! \times 8!} - 630$.

(٢٢) [Aust.MC 1991] كم عدد الأعداد الصحيحة ABC بين العددين 100 و 999 حيث $A > B > C$ ؟

الحل

يمكن حل هذه المسألة بسرد الأعداد ولكن بملاحظة أن $A \neq 0$ و $B \neq 0$ وأن المراتب مختلفة ولهذا ندرس الحالتين التاليتين:

(أ) المرتبة $C = 0$: في هذه الحالة يمكن اختيار A و B من المجموعة $\{1, 2, \dots, 9\}$ بعدد من الطرق يساوي $36 = \dfrac{9!}{2! \times 7!} = C(9,2)$ ومن ثم ترتيبها بطريقة وحيدة.

(ب) $C \neq 0$: في هذه الحالة نختار A و B و C من المجموعة $\{1, 2, \dots, 9\}$ بعدد من الطرق يساوي $84 = \dfrac{9!}{3! \times 6!} = C(9,3)$ وترتيبها بطريقة وحيدة. إذن، عدد الأعداد المطلوبة هو $36 + 84 = 120$.

(٢٣) [Aust.MC 1991] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي أصغر من

1000 بحيث يكون مجموع مراتبها يساوي 6؟

الحل

الأعداد المطلوبة هي على الصورة abc حيث $a+b+c=6$ و $0 \leq a\,,\,b\,,\,c \leq 9$. عدد هذه الأعداد باستخدام استراتيجية النجوم والأشرطة هو $C(8,2) = \dfrac{8!}{2!\times 6!} = 28$.

(٢٤) [Aust.MC 1987] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من 4 مراتب غير صفرية مختلفة بحيث يكون مجموع المراتب يساوي 12؟

الحل

لاحظ أن أحد هذه المراتب يساوي 1 وإلا لكان أصغر مجموع نحصل عليه هو $2+3+4+5=14>12$. أيضاً، أحد هذه المراتب يساوي 2 وإلا لكان أصغر مجموع نحصل عليه هو $1+3+4+5=13>12$. الآن، المطلوب هو إيجاد عددين مختلفين a و b حيث $a+b=9$. الحلان الوحيدان هما $\{4,5\}$ و $\{3,6\}$. وبهذا تكون مجموعتا المراتب هما $\{1,2,3,6\}$ أو $\{1,2,4,5\}$. ويمكن ترتيب كل منهما بعدد من الطرق يساوي $4!=24$. إذن، عدد الأعداد هو $24+24=48$.

(٢٥) [Aust.MC 1985] بكم طريقة يمكن اختيار ثلاثة أعداد صحيحة موجبة مختلفة x و y و z حيث $1 \leq x \neq y \neq z \leq 30$ بحيث يكون مجموع هذه الأعداد مضاعفاً للعدد 3 والترتيب غير مهم؟

الحل

يمكن تجزئة أعداد المجموعة من 1 إلى 30 إلى ثلاث مجموعات منفصلة تحتوي كل منها على 10 أعداد هي

$$A = \{3k : 1 \leq k \leq 10\}$$
$$B = \{3k+1 : 0 \leq k \leq 9\}$$
$$C = \{3k+2 : 0 \leq k \leq 9\}$$

الآن، لكي يكون مجموع الأعداد مضاعفاً للعدد 3 فيمكن أن تكون هذه الأعداد جميعاً في مجموعة واحدة أو أن نختار عدداً واحداً من كل من المجموعات الثلاث. عدد طرق الحالة الأولى هو $3C(10,3)$ وعدد طرق الحالة الثانية هو $10^3 = 10 \times 10 \times 10$. إذن، عدد الطرق جميعاً هو

$$3C(10,3) + 1000 = \frac{3 \times 10!}{3! \times 7!} + 1000 = 360 + 1000 = 1360 .$$

(٢٦) كم عدد الكلمات المختلفة التي يمكن تكوينها من حروف الكلمة $ASCENDENCE$ ؟

الحل

عدد التبديلات (الكلمات المختلفة) لمجموعة مكونة من عشرة عناصر حيث ثلاثة من عناصرها هي E وعنصران هما N وعنصران هما C وباقي العناصر مختلفة هو

$$\frac{10!}{3! \times 2! \times 2! \times 1! \times 1! \times 1!} = 151200 .$$

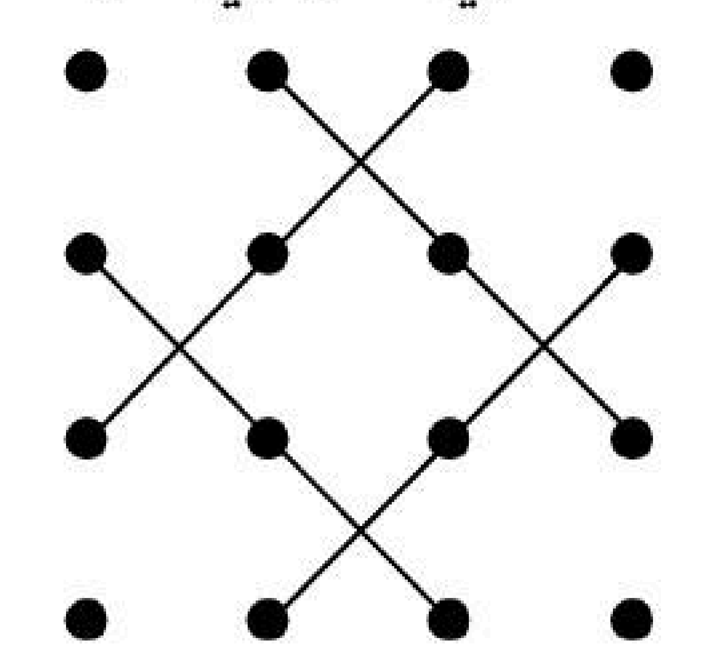
(٢٧) (AHSME 1993) كم عدد المثلثات التي يمكن تكوينها بحيث تكون رؤوسها من نقاط شبكة نقاط من النوع 4×4؟

الحل

عدد رؤوس المثلث هي 3. فلذا عدد المثلثات التي يمكن تكوينها بحيث تكون رؤوسها مختارة من 16 نقطة هو $C(16,3)$. سنطرح من هذا العدد عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاث نقاط على استقامة واحدة هي:

(أ) يوجد 4 مستقيمات أفقية و 4 مستقيمات رأسية وقطران كل منهما مكون من أربع نقاط. عدد المجموعات الجزئية هنا هو $10C(4,3)$.

(ب) المستقيمات المكونة من 3 نقاط هي 4 وهي المبينة في الشكل أدناه



ولذا فعدد المثلثات هو $C(16,3) - 10\,C(4,3) - 4 = 560 - 40 - 4 = 516$.

(٢٨) [TFAOC] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي أصغر من 500 والتي يمكن كتابتها كمجموع مكعبين كاملين؟

الحل

لاحظ أن $1^3 = 1$، $2^3 = 8$، $3^3 = 27$، $4^3 = 64$، $5^3 = 125$، $6^3 = 216$، $7^3 = 343$، $8^3 = 512$. ولذا فعدد المكعبات التي أصغر من 500 يساوي 7. وبالتجريب نجد أن مجموع أي اثنين مختلفين من هذه المكعباتأصغر من 500 ما عدا $6^3 + 7^3 = 559$. إذن، عدد الأعداد الصحيحة الأصغر من 500 التي يمكن كتابتها كمجموع مكعبين مختلفين

يساوي $20 = 1 - \frac{7!}{2! \times 5!} = C(7,2) - 1$.

ولكن، يوجد أيضاً 6 أعداد أصغر من 500 مكتوبة كمجموع مكعبين متساويين هي $a^3 + a^3$ حيث $a = 1,2,3,4,5,6$. إذن، العدد الكلي هو $26 = 20 + 6$.

(٢٩) [AIME 2005] يمتلك أحمد 4 قطع نقدية متشابهة ذهبية اللون و 4 قطع نقدية متشابهة فضية اللون. أحد جانبي كل من هذه القطع صورة والجانب الآخر كتابة. ما عدد الطرق المختلفة لوضع هذه القطع واحدة فوق الأخرى بحيث لا تتلاصق صورتا قطعتين؟

الحل

إذا تجاهلنا اللون فيمكن رص القطع واحدة فوق الأخرى بحيث يتحقق الشرط في الحالتين التاليتين

الحالة الأولى: جميع صور الثماني قطع متجهة إلى الأسفل. ويمكن إنجاز هذه الحالة بطريقة واحدة فقط.

الحالة الثانية: إحدى القطع الثماني (القطعة السفلى) صورتها للأعلى وبقية القطع الأخرى فوقها صورها للأعلى أيضاً. يمكن إنجاز ذلك بطرق عددها 8. الآن، يمكن اختيار 4 قطع من القطع الثماني لتكون القطع الذهبية بعدد من الطرق يساوي $C(8,4)$. إذن، عدد طرق رص القطع النقدية لتحقيق الشرط المطلوب هو $630 = \frac{9 \times 8!}{4! \times 4!} = 9 \times C(8,4)$.

(٣٠) [AIME 1990] علقنا 8 بالونات منفوخة على حائط بحيث تشكل 3 أعمدة، كل من العمود الأول والثاني يتكون من 3 بالونات والعمود الثالث يتكون من بالونين. المطلوب تنفيس البالونات باتباع الترتيب التالي:

(أ) نختار أولاً العمود المراد تنفيس أحد بالوناته.

(ب) نقوم بتنفيس البالون الواقع في أسفل العمود.

كم عدد الطرق الممكنة لتنفيس جميع البالونات؟

الحل

الطرق الممكنة تتكون من اختيار عمود ثم تنفيس البالون الواقع أسفل هذا العمود وتكرار ذلك ثماني مرات. لنفرض أن A ، B ، C تمثل اختيار الأعمدة الأول، الثاني، الثالث على التوالي. المسألة الآن يتم إنجازها بإيجاد عدد الترتيبات الممكنة لكلمة $AAABBBCC$. وهذا العدد يساوي

$$\frac{8!}{3!\times 3!\times 2!} = \frac{8\times 7\times 6\times 5\times 4}{3\times 2\times 2} = 560.$$

(٣١) [AIME 2004] نقول إن العدد المكون من أربع مراتب $ABCD$ عدد شبيه الأفعى إذا كان $A < B$ و $B > C$ و $C < D$. مثلاً، كل من العددين 1324 و 1423 شبيه الأفعى. كم عدداً شبيه الأفعى مكوناً من أربع مراتب ؟

الحل

لنفرض أولاً أن جميع مراتب العدد غير صفرية. في هذه الحالة نستطيع اختيار 4 مراتب من 9 مراتب بعدد من الطرق يساوي $C(9,4)$. لكل من هذه الأعداد

يوجد 6 طرق لاختيار مرتبتين من المراتب الأربع. هذه الخيارات هي

AB ، AC ، AD ، BC ، BD ، CD.

وإذا افترضنا أن $A < B < C < D$ لهذه المراتب فإننا نستطيع أن نُكْمِل كلاً من المرتبتين بطريقة واحدة للحصول على عدد شبيه الأفعى وهذه الأعداد هي:

$AB : ACBD$ ، $AC : ADBC$ ، $AD : ACBD$ ،

$BC : BCAD$ ، $BD : BDAC$ ، $CD : CDAB$.

وبملاحظة وجود عددين متساويين فنرى أن عدد الأعداد المختلفة في هذه الحالة هو 5. إذن، عدد الأعداد شبيهة الأفعى في الحالة الأولى هو

$$5C(9,4) = \frac{5 \times 9!}{4! \times 5!} = 630 .$$

نفرض الآن أن إحدى مراتب العدد هي المرتبة 0. في هذه الحالة نستطيع اختيار المراتب الثلاث الأخرى بعدد من الطرق يساوي $C(9,3)$. لنفرض أن مراتب العدد هي $0 < B < C < D$. نقوم الآن باختيار مرتبتين ثم نكمل العدد. لاحظ أن مرتبة الآلاف للعدد لا يمكن أن تساوي صفراً. إذن، يتبقى لدينا ثلاثة أعداد هي $BC0D$ ، $BD0C$ ، $CD0B$. ويكون عدد الأعداد شبيهة الأفعى في هذه الحالة هو

$$3C(9,3) = \frac{3 \times 9!}{3! \times 6!} = 252 .$$

إذن، عدد الأعداد شبيهة الأفعى يساوي

$$630 + 252 = 882 .$$

(٣٢) [AIME 1989] وضعنا عشر نقاط على محيط دائرة. كم عدد المضلعات المختلفة التي يمكن تكوينها باستخدام بعض أو جميع هذه النقاط كرؤوس؟

الحل

أي مجموعة مكونة من 3 نقاط فأكثر تحدد مضلعاً واحداً. ولذا المطلوب إيجاد عدد المجموعات الجزئية التي عدد عناصرها 3 فأكثر من مجموعة عدد عناصرها 10. هذا العدد هو عدد جميع المجموعات الجزئية من مجموعة عدد عناصرها 10 مطروحاً منه عدد المجموعات الجزئية التي عدد عناصرها 0 أو 1 أو 2. إذن، عدد المضلعات هو

$$2^{10} - C(10,0) - C(10,1) - C(10,2) = 968 .$$

(٣٣) [TFAOC] أراد مزارع زرع 15 شتلة من الزهور في صف واحد داخل حديقة منزله. 10 من هذه الشتلات ورد جوري والخمس شتلات الباقية قرنفل. بكم طريقة يمكنه إنجاز ذلك بشرط أن لا تكون شتلتان من القرنفل متجاورتين؟

الحل

يمكن استخدام النجوم والأشرطة لحل هذه المسألة وذلك باستخدام 5 أشرطة لشتلات القرنفل وبعد ذلك يقوم المزارع بغرس شتلة ورد جوري بين كل شريطين ليضمن عدم التجاور وبهذا يحتاج إلى 4 شتلات من الورد الجوري ويتبقى لديه 6 شتلات من الورد الجوري يمثلها بنجوم. الآن، عدد الطرق هو عدد طرق اختيار 6 مواقع من بين $11 = 5 + 6$ موقعاً. هذا العدد هو $462 = \dfrac{11!}{6! \times 5!} = C(11,6)$.

(٣٤) [TFAOC] وعاء يحتوي على 10 حبات من حلوى MM و 5 حبات من حلوى الهيرشي. سقط الوعاء على الأرض وتناثرت منه الحلوى وتراكض 8 أطفال للحصول على هذه الحلوى. كم عدد طرق توزيع حبات الحلوى على الأطفال؟

الحل

سنستخدم طريقة النجوم والأشرطة لتوزيع 10 حبات حلوى MM على ثمانية أطفال وتوزيع 5 حبات حلوى الهيرشي على ثمانية أطفال ومن ثم استخدام مبدأ الضرب للحصول على العدد المطلوب. نحتاج 7 أشرطة لفصل الأطفال الثمانية و 10 نجوم لحبات حلوى MM وبهذا يكون عدد طرق هذه الحالة هو $C(17,10)$. وبالنسبة لحبات حلوى الهيرشي نحتاج 7 أشرطة لفصل الأطفال الثمانية وخمسة نجوم لحبات حلوى الهيرشي ويكون عدد طرق هذه الحالة هو $C(12,5)$. إذن، عدد طرق توزيع حبات الحلوى هو $C(17,10) \times C(12,5) = 15402816$.

(٣٥) [Math counts 1985] ما مرتبة آحاد المجموع $1! + 2! + 3! + \cdots + 14! + 15!$؟

الحل

لاحظ أن $1! = 1$، $2! = 2$، $3! = 6$، $4! = 24$، $5! = 120$، $6! = 720$. ولذا فإن مرتبة آحاد كل من الأعداد $6!$ إلى $15!$ هي 0. ومن ثم نحتاج إلى إيجاد مرتبة آحاد المجموع $1! + 2! + 3! + 4! = 33$ وهي 3.

(٣٦) [MAΘ 1990] لدينا 5 مستقيمات ودائرتان في المستوى. ما أكبر عدد ممكن من النقاط الذي نحصل عليه من تقاطعات الأشكال السبعة؟

الحل

كل مستقيمين يتقاطعان في نقطة. ولذا فعدد نقاط تقاطع المستقيمات هو $C(5,2) = 10$. كل مستقيم يقطع كلاً من الدائرتين في نقطتين. ولذا عدد نقاط تقاطع المستقيمات مع الدائرتين يساوي $5 \times 2 \times 2 = 20$. وأخيراً تتقاطع

الدائرتان مع بعضهما البعض بنقطتين. إذن، أكبر عدد لنقاط التقاطع هو $10 + 20 + 2 = 32$.

(٣٧) [MAΘ 2011] يمتلك أحمد 8 قمصان و 6 بنطلونات و 10 أزواج من الجوارب. في صباح يوم بارد قرر أحمد قبل خروجه إلى المدرسة أن يلبس قميصين وثلاثة أزواج من الجوارب وبنطلوناً واحداً. كم عدد الخيارات المختلفة المتاحة لأحمد؟

الحل

يمكن اختيار قميصين بعدد من الطرق يساوي $C(8,2)$ واختيار ثلاثة أزواج جوارب بعدد من الطرق يساوي $C(10,3)$ واختيار بنطلون بعدد من الطرق يساوي 6. إذن، عدد الخيارات المتاحة لأحمد يساوي

$$6 \times C(8,2) \times C(10,3) = \frac{6 \times 8!}{6! \times 2!} \times \frac{10!}{3! \times 7!} = 20160.$$

(٣٨) [MAΘ 2011] رسم أحمد 15 قطعة مستقيمة من الطول نفسه بعضها مواز لعرض الورقة والبعض الآخر موازلطول الورقة. ما أكبر عدد من المستطيلات التي يمكن تكوينها باستخدام هذه القطع المستقيمة ؟

الحل

لنفرض أن n هو عدد المستقيمات الموازية لعرض الورقة. إذن، يوجد $15 - n$ مستقيماً موازياً لطول الورقة. عدد المستطيلات هو

$$\begin{aligned} C(15-n,2)\times C(n,2) &= \frac{(15-n)\times(14-n)}{2}\times\frac{n\times(n-1)}{2} \\ &= \frac{(15-n)(n-1)}{2}\times\frac{(14-n)\times n}{2} \\ &= \frac{49-(n-8)^2}{2}\times\frac{49-(n-7)^2}{2} \end{aligned}$$

وهذا العدد أكبر ما يمكن عندما يكون $n=7$ أو $n=8$. وبهذا فإن أكبر عدد من المستطيلات التي يمكن تكوينها يساوي $C(8,2)\times C(7,2)=28\times 21=588$.

(٣٩) [MAΘ 2011] ما عدد الحلول الصحيحة الموجبة للمعادلة $a+b+2c=35$؟

الحل

بفرض أن $x=a-1$ ، $y=b-1$ ، $z=c-1$ يكون المطلوب هو إيجاد عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $x+y+2z=31$. لاحظ أن z تأخذ القيم $0,1,2,3,\ldots,15$. ولذا فالمطلوب إيجاد جميع الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلات $x+y=31,\ x+y=29,\ \ldots,\ x+y=1$. وباستخدام طريقة النجوم والأشرطة نجد أن العدد الكلي للحلول هو

$$\begin{aligned} & C(32,1)+C(30,1)+C(28,1)+\cdots+C(2,1) \\ & = 32+30+28+\cdots+2=272 \end{aligned}$$

حل آخر: كما في الحل الأول، نفرض أن $x=a-1$ ، $y=b-1$ ، $z=c-1$ لنحصل على $x+y+2z=31$.

لاحظ الآن، أنه لا يمكن أن يكون العددان x و y زوجيين معاً أو فرديين معاً. إذن، أحدهما فردي والآخر زوجي. إذا كان $x=2t+1$ فردياً وكان $y=2r$

زوجياً فإننا نحصل على $2t+1+2r+2z=31$. أي أن $t+r+z=15$.
وعدد الطرق في هذه الحالة هو $C(17,2)=136$.
وبالمثل، عدد الطرق عندما يكون x زوجياً و y فردياً هو $C(17,2)=136$.
إذن، عدد الحلول الكلي هو $136+136=272$.

(٤٠) [MAΘ 2010] لدى محمد خمسة مفاتيح مختلفة. إذا كان A هو عدد طرق ترتيبها في صف واحد و B عدد طرق ترتيبها حول دائرة و C هو عدد طرق وضعها في علاقة مفاتيح فما قيمة $\frac{A}{B}+\frac{B}{C}$؟

الحل

لاحظ أن $A=5!$ و $B=4!$ و $C=\frac{4!}{2}$. إذن، $\frac{A}{B}+\frac{B}{C}=5+2=7$.

(٤١) [AHSME 1994] في الحفل الختامي للنشاط المدرسي وضعت 9 مقاعد في الصف الأول ليجلس عليها 3 مدرسين و 6 من طلاب المدرسة المتميزين. إذا أردنا تجليس كل من المدرسين بين طالبين فبكم طريقة يمكن إنجاز ذلك؟

الحل

لنفرض أنه تم تجليس الطلاب الستة. الآن، يوجد خمسة أماكن بين الطلاب لوضع مقاعد المدرسين. ولذا فعدد الخيارات هو $C(5,3)$. ولكن يوجد $3!$ طريقة لترتيب المدرسين. إذن، عدد الطرق يساوي $3!\times C(5,3)=6\times 10=60$.
ولكن عدد طرق تجليس 6 طلاب في صف هو $6!$. وبهذا يكون عدد الطرق المطلوب هو $6!\times 60=43200$.

(٤٢) [AMC12A 2003] بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة مكونة من

5 حروف A و 5 حروف B و 5 حروف C بحيث لا تحتوي الحرف A في الخمسة أماكن الأولى ولا تحتوي الحرف B في الخمسة أماكن الثانية ولا تحتوي الحرف C في الخمسة أماكن الأخيرة؟

الحل

سندرس الحالات الممكنة وهي ست حالات.

الحالة الأولى: الخمسة مواقع الأولى جميعها الحرف B. عدد الطرق لذلك هو 1. في هذه الحالة الحرف C يجب أن يحتل الخمسة مواقع الوسطى والحرف A يجب أن يحتل الخمسة مواقع الأخيرة. وعدد طرق إنجاز ذلك هو 1×1. إذن، عدد ترتيبات هذه الحالة هو $1 = (1)^3$.

الحالة الثانية: الخمسة مواقع الأولى جميعها الحرف C. هذه الحالة مماثلة للحالة الأولى وعدد ترتيباها هو $1 = (1)^3$.

الحالة الثالثة: إذا وضعنا 4 حروف B وحرف C في المواقع الخمس الأولى. في هذه الحالة، الخمسة مواقع الثانية يجب أن تكون 4 حروف C وحرف A والخمسةمواقع الأخيرة يجب أن تكون 4 حروف A وحرف B. وعدد الترتيبات في هذه الحالة هو $5^3 = C(5,1)\times C(5,1)\times C(5,1)$.

الحالة الرابعة: 4 حروف C وحرف B في المواقع الخمسة الأولى. هذه الحالة مماثلة للحالة الثالثة وعدد ترتيباها هو 5^3.

الحالة الخامسة: ثلاثة حروف B وحرفان C في الخمسة مواقع الأولى. بصورة مشابهة نجد أن عدد ترتيبات هذه الحالة هو $10^3 = C(5,2)\times C(5,2)\times C(5,2)$.

الحالة السادسة: ثلاثة حروف C وحرفان B في الخمسة مواقع الأولى. هذه الحالة مماثلة للحالة الخامسة وعدد ترتيباها يساوي 10^3.

إذن، عدد الترتيبات جميعاً هو $2252 = 2 \times 10^3 + 2 \times 5^3 + 2 \times (1!)^3$.

(٤٣) [AIME 2010] تتكون كلية العلوم الرياضية في إحدى الجامعات الصغيرة من ثلاثة أقسام هي الرياضيات، الاحصاء، الحاسب الآلي. في كل من هذه الأقسام يوجد أربعة أعضاء هيئة تدريس، رجلان وامرأتان. نريد تكوين لجنة من 6 أعضاء هيئة تدريس، ثلاثة رجال وثلاث نساء على أن تحتوي هذه اللجنة على عضوين من كل من الأقسام الثلاثة. ما عدد اللجان التي يمكن تكوينها بهذه الشروط؟

الحل

لدينا حالتان هما:

(أ) اختيار رجل واحد وامرأة واحدة من كل قسم. في هذه الحالة عدد اللجان هي

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 = 64$$

(ب) رجلان من أحد الأقسام وامرأتان من القسم الثاني وامرأة ورجل من القسم الثالث. في هذه الحالة عدد الخيارات هو $4 = 4 \times 1 \times 1$. ولكن، يوجد عدد $3!$ من الخيارات لاختيار القسم. وبهذا فعدد الطرق في هذه الحالة هو $24 = 3! \times 4$.

إذن، عدد اللجان يساوي $88 = 24 + 64$.

(٤٤) [MAΘ 2008] كم عدد التبديلات المكونة من ثلاثة حروف مأخوذة من الكلمة $SACRAMENTO$ ؟

الحل

لدينا حالتان. الأولى منهما أن يحتوي التبديل على حرف واحد A على الأكثر والثانية أن يحتوي التبديل على الحرفين A. في الحالة الأولى يوجد 9 خيارات

للحرف الأول و 8 خيارات للحرف الثاني و 7 خيارات للحرف الثالث. وبهذا يكون عدد خيارات هذه الحالة هو $9 \times 8 \times 7 = 504$.

أما الحالة الثانية، بعد اختيار الحرفين A يوجد 8 خيارات لاختيار الحرف الثالث وثلاث طرق لتبديل كل من هذه الخيارات هي ZAA، AZA، AAZ. إذن، عدد طرق هذه الحالة هو $3 \times 8 = 24$. ويكون العدد الكلي هو $528 = 24 + 504$.

(٤٥) [MAΘ 2008] نريد الوصول من نقطة الأصل $(0,0)$ في المستوى الإحداثي إلى النقطة $(4,4)$ بحيث تكون الخطوة، التحرك وحدة إلى اليمين أو اليسار أو الأعلى أو الأسفل. على سبيل المثال، يمكن أن تكون الخطوة من $(0,0)$ هي التحرك إلى $(1,0)$ أو $(0,1)$ أو $(-1,0)$ أو $(0,-1)$.
ما عدد المسارات الممكنة من $(0,0)$ إلى $(4,4)$ المكونة من عشر خطوات؟

الحل

يمكن الوصول من $(0,0)$ إلى $(4,4)$ بعشر خطوات بالتحرك 5 خطوات إلى اليمين وخطوة إلى اليسار و 4 خطوات إلى الأعلى أو خمسخطوات إلى الأعلى وأربعخطوات إلى اليمين وخطوة إلى الأسفل.عدد مسارات كل من الحالتين هو $\frac{10!}{4! \times 5! \times 1!} = 1260$.إذن، عدد المسارات هو $2 \times 1260 = 2520$.

(٤٦) [MAΘ 2008]كم عدد طرق توزيع 10بالونات متشابهة على أحمد، بدر، جمال بحيث لا يشترط أن يأخذ أحدهم أياً من البالونات؟

الحل

هذه مسألة يمكن حلها مباشرة بتطبيق طريقة النجوم والأشرطة، نحتاج شريطين لفصل الأشخاص و 10 نجوم لتمثيل البالونات. وبهذا فعدد الطرق المطلوب هو

$$C(12,2)=\frac{12!}{2!\times 10!}=66 .$$

(٤٧) [MAΘ 2008] إذا كانت العشرة بالونات في المسألة (٤٦) ملونةبثلاثة ألوان: 3 بالونات لونها أحمر، 3 بالونات لونها أصفر، 4 بالونات لونها أزرق فما عدد الطرق الممكنة لتوزيعها على الأطفال الثلاثة؟

الحل

يمكن استخدام طريقة النجوم والأشرطة في هذه المسألة أيضاً بإيجاد عدد طرق توزيع كل من الألوان الثلاثة فنحصل من مبدأ الضرب على العدد

$$C(5,2)\times C(5,2)\times C(6,2)=10\times 10\times 15=1500 .$$

(٤٨) [MAΘ 2008]وضعت خمسة مقاعد في صف واحد وخصص مقعد واحد لكل من المدرسين الخمسة للجلوس عليه. عند وصول المدرسين لم يلتزموا بالجلوس على المقاعد المخصصة لكل منهم ولكنهم قاموا بالجلوس عشوائياً على هذه المقاعد. كم عدد الطرق الممكنة لجلوس المدرسين بحيث يجلس اثنان فقط منهم على المقعدين المخصصين لهما؟

الحل

يمكن تجليس اثنان من المدرسين على المقعدين المخصصين لهما بعدد من الطرق يساوي $C(5,2)=10$. ويوجد طريقتان فقط لتجليس كل من الثلاثة مدرسين

الآخرين على مقعد غير مخصص له هما BCA و CAB. إذن، عدد الطرق هو $2 \times 10 = 20$.

(٤٩) [MAΘ 2008] لدينا 5 كرات نريد توزيعها على أربعة صناديق A، B، C، D يتسع كل منها لكرتين على الأكثر. كم عدد الطرق الممكنة لتوزيع هذه الكرات على الصناديق الأربعة؟

الحل

توجد حالتان فقط لتوزيع الكرات الخمس. الأولى منهما وضع كرتين في كل من صندوقين وكرة واحدة في أحد الصندوقين الآخرين أو وضع كرتين في صندوق وكرة واحدة في كل من الصناديق الثلاثة الباقية. عدد طرق الحالة الأولى هو $2 \times C(4,2) = 12$. وعدد طرق الحالة الثانية هو 4. إذن، عدد الطرق الكلية هو $12 + 4 = 16$.

(٥٠) [MAΘ 2008] عدد ترتيبات حروف الكلمة $AABBCC$ هو $\dfrac{6!}{2! \times 2! \times 2!} = 90$. كم عدد الترتيبات من بينها التي تحتوي الكلمة ABC؟

الحل

نفرض أن الكلمة ABC هي حرف واحد. ولذا يكون المطلوب إيجاد عدد ترتيبات الحروف الأربعة ABC، A، B، C. هذا العدد هو $4! = 24$. ولكن هناك ترتيبان من بينها متشابهان هما $ABC \quad C \quad B \quad A$ و $C \quad B \quad A \quad ABC$. ولذا عدد الترتيبات هو $24 - 1 = 23$.

(٥١) نريد اختيار لجنة مكونة من 4 أعضاء هيئة تدريس ومقرر لها من بين 15

عضو هيئة تدريس. كم عدد الطرق الممكنة لاختيار هذه اللجنة؟

الحل

يمكن اختيار لجنة مكونة من 5أشخاص (أعضاء اللجنة والمقرر) من بين 15عضو هيئة تدريس بعدد من الطرق يساوي $C(15,5) = \frac{15!}{10!\times 5!} = 3003$.

بعد اختيار اللجنة يمكن اختيار المقرر بعدد من الطرق يساوي 5. إذن، عدد الطرق هو $5 \times 3003 = 15015$.

(٥٢) أراد 14 شخصاً الذهاب إلى البر باستخدام ثلاث سيارات، سيارة جيب تتسع لسبعة أشخاص وسيارة صالون تتسع لخمسة أشخاص وسيارة رياضية تتسع لثلاثة أشخاص. بكم طريقة يمكنهم ركوب السيارات؟

الحل

عدد الأشخاص 14والسعة القصوى للثلاث سيارات هي 15. ولذا يمكن تجليس الأشخاص في السيارات الثلاث بإحدى الحالات المبينة في الجدول التالي:

الجيب	صالون	الرياضية
6	5	3
7	5	2
7	4	3

عدد طرق الحالة الأولى هو $C(14,6)\times C(8,5)\times C(3,3)$.

عدد طرق الحالة الثانية هو $C(14,7)\times C(7,5)\times C(2,2)$.

عدد طرق الحالة الثالثة هو $C(14,7)\times C(7,4)\times C(3,3)$.

ولذا يمكن تجليس الأشخاص بعدد من الطرق يساوي

$C(14,6)\times C(8,5)+C(14,7)\times C(7,5)+C(14,7)\times C(7,4)$.

(٥٣) [PACAT] أردنا تجليس 20 شخصاً بينهم أخوان على طاولة دائرية بحيث يجلس شخصواحد بين الأخوين. ما عدد الطرق الممكنة لإنجاز ذلك؟

الحل

لنفرض أن الأخوين والشخص الجالس بينهما هم شخص واحد. ومن ثم نحتاج إلى تجليس 18 شخصاً حول طاولة دائرية. عدد طرق إنجاز ذلك هو $17!$. كما يمكن تجليس الأخوين بأي جهة من جهتي الشخص الجالس بينهما بعدد من الطرق يساوي 2. وأخيراً الشخص الجالس بين الأخوين يمكن أن يكون أياً من الأشخاص الـــ 18. إذن، العدد الكلي لتجليس الأشخاص هو $18\times 2\times 17! = 2\times 18!$.

(٥٤) [PACAT]نريد تكوين لجنة تحتوي على 3أشخاص من بين 6أطباء و 4ممرضين. إذا رفض الممرض Aأن ينضم إلى اللجنة التي تحتوي الطبيب B ، بينما الطبيب Bيقبل أن يكون ضمن اللجنة فقط إذا احتوت اللجنة الممرض Cفما عدد اللجان الممكن تكوينها؟

الحل

لدينا حالتان: إما أن يكون الطبيب Bعضواً في اللجنة أو أن لا يكون عضواً في اللجنة. إذا كان Bعضواً في اللجنة فإن الممرض Cعضو في اللجنة والممرض A ليس عضواً في اللجنة.إذن، يبقى 5أطباء وممرضان نختار منهم العضو الثالث في اللجنة بعدد من الطرق يساوي 7. أما إذا لم يكن Bعضواً في اللجنة فيبقى لدينا

9أشخاص نختار ثلاثة منهم بعدد من الطرق يساوي $84 = \frac{9!}{6! \times 3!} = C(9,3)$.

إذن، عدد اللجان جميعاً هو $91 = 84 + 7$.

(٥٥) [PACAT] في سباق للخيل تتنافس 6أحصنة بينها الحصانان Aو B. كم عدد الترتيبات الممكنة لوصول الأحصنة الستة إلى خط النهاية بشرط أن يصل A دائماً قبل B ؟

الحل

لدينا حالتان: إما أن يصل A قبل B أو أن يصل B قبل A. إذن، عدد الترتيبات الممكنة هو عدد ترتيبات 6أحصنة مقسوماً على 2. أي $360 = \frac{6!}{2}$.

(٥٦) بكم طريقة يمكن ترتيب حروف الكلمة $MAROUF$ بشرط أن لا يكون الحرفان Mو F متجاورين؟

الحل

عدد ترتيبات حروف الكلمة $MAROUF$ يساوي $6!$. عدد الترتيبات بحيث يكون الحرفان Mو F متجاوران هو $2 \times 5!$ (يمكن أن يكون FM أو MF). إذن، عدد الترتيبات بحيث لا يتجاور الحرفان Mو F هو

$$6! - 2 \times 5! = 720 - 240 = 480.$$

(٥٧) كم عدد طرق وقوف 4أطفال وأمهاتهم في طابور بحيث يقف الطفل دائما أمام والدته؟

الحل

لنفرض أن C_1, C_2, C_3, C_4 هم أطفال الأمهات M_1, M_2, M_3, M_4 على التوالي. إذن، المطلوب ترتيب 8عناصر بأربعة أنماط $M_i C_i$. عدد هذه الترتيبات هو

$$\frac{8!}{2!\times 2!\times 2!\times 2!}=2520.$$

(٥٨) [PACAT] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة n التي تزيد عن 6000000 ومراتبها هي الأعداد $3,4,4,5,6,6,7$ ؟

الحل

بما أن العدد n يزيد عن 6000000 فإن مرتبة الملايين يجب أن تكون 6 أو 7. إذا كانت مرتبة الملايين 6 فإنه يمكن ترتيب المراتب الست الباقية بعدد من الطرق

$$\frac{6!}{2!\times 1!\times 1!\times 1!\times 1!}=360.$$

أما إذا كانت مرتبة الملايين 7 فإنه يمكن ترتيب المراتب الست الباقية بعدد من الطرق

$$\frac{6!}{2!\times 2!\times 1!\times 1!}=180$$

إذن، عدد الأعداد n هو $540 = 180 + 360$.

(٥٩) [AMC122007] يقال إن مجموعة من الأعداد الصحيحة مميزة إذا كانت لا تحوي أكثر من عدد من أي ثلاثة أعداد موجبة متتابعة. كم عدد المجموعات الجزئية المميزة من $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ (بما فيها المجموعة الخالية)؟

الحل

من شرط المسألة سيكون بين كل عددين مختارين في الوضع المرتب للأعداد لمجموعة مميزةعددان متروكان على الأقل. ولاحظ أن المجموعة الجزئية المميزة من المجموعة المعطاة ستحوي أربعة عناصر على الأكثر. سنعد المجموعات الجزئية المميزة

حسب عدد عناصرها.

الحالة الأولى:المجموعة الجزئية المميزة هي المجموعة الخالية. يوجد مجموعة واحدة في هذه الحالة.

الحالة الثانية: تحوي المجموعة الجزئية المميزة على عنصر واحد. هناك 12 مجموعة في هذه الحالة.

الحالة الثالثة: تحوي المجموعة الجزئية المميزة على عنصرين على الأقل بينها عددان متروكان ○□□○ حيث الدائرة تمثل العدد المختار والمربع يمثل العدد المتروك ويتبقى ثمانية أعداد يمكنها أن تكون قبل العدد الأول المختار أو بعد الثاني أو بينهما، وباعتبار المختارينحاجزين بالنسبة لها فإن عدد طرق ذلك هو $C(8+3-1,3-1)=C(10,2)=45$.

الحالة الرابعة: تحوي المجموعة الجزئية المميزةعلى ثلاثةعناصر وسيكون بينها على الأقل 4أعداد متروكة. أي عددان متروكان بين كل عددين مختارين ولنمثل الحل بكرات وأشرطة ○□□○□□○ ،ويتبقى خمسة أعداد يمكنها أن تكون قبل العدد الأول المختارأو بعد الثالث أو بين أي أثنين منهما وكأن الثلاث أعداد المختارةحواجزبالنسبة لها. أي يمكن عمل ذلك بعدد من الطرق يساوي $C(5+4-1,4-1)=C(8,3)=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$.

الحالة الخامسة: تحوي المجموعة الجزئية المميزة أربعة عناصر وسيكون بينها على الأقل 6أعداد متروكة. أي عددان متروكان بين كل عددين مختارين ولنمثل ذلك بكرات وأشرطة ○□□○□□○□□○ ويتبقى عددين متروكين يمكنهما أن يكونا قبل العدد الأول المختار أو بعد الرابع أو بين أي اثنين منها وكأن الأربعة أعداد

المختارة حواجز بالنسبة لها. أي يمكن عمل ذلك بعدد من الطرق $15 = \dfrac{6 \times 5}{2 \times 1} = C(6,4)$. وبالتالي عدد المجموعات الجزئية المميزة يساوي 129.

(٦٠) أراد صلاح توزيع 9قطع حلوى على إخوته الأربعة. بكم طريقة يمكنه عمل ذلك بشرط أن يعطي كل واحد قطعة على الأقل؟

الحل

يمكن حل المسألة باستخدام النجوم و الأشرطة باعتبار قطع الحلوى النجوم ونضع ثلاثة حواجز كأشرطة لتحديد نصيب كل أخ من الحلويات. وكون الحصص تتحدد بحركة الحواجز بين النجوم فسيكون عدد التوزيعات المطلوبة بعد إعطاء كل أخ قطعة هو

$$C(8,3) = \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 56$$

مسائل غير محلولة

(١) ما عدد طرق ترتيب حروف الكلمة $ABCDEFGH$ بشرط أن يقع الحرف C مباشرة بعد B والحرف B مباشرة بعد الحرف A ؟

(أ) $6!$ (ب) $7!$ (ج) $8!$ (د) $6 \times 6!$

(٢) لتكن A ، B ، C ، D ، E خمس نقاط في المستوى لا توجد ثلاثة منها على استقامة واحدة من المستوى. ما عدد المستقيمات المتعامدة التي يمكن تكوينها من هذه النقاط ؟

(أ) 6 (ب) 15 (ج) 30 (د) 45

(٣) بكم طريقة يمكن ترتيب 6 من عشرة أشخاص $A_1, \ldots, A_{10}$ إذا رفض A_1 أن يكون بجوار A_2 ؟

(أ) $10! - 9!$ (ب) $10! - 2 \times 9!$ (ج) $\frac{10! - 2 \times 9!}{4!}$ (د) $\frac{10! - 9!}{4!}$

(٤) كم عدد الكلمات الثلاثية (تستخدم المراتب 0 ، 1 ، 2) من الطول 10 التي تتكون من 5 مراتب صفرية و 3 مراتب 1 ومرتبتين 2؟

(أ) 2500 (ب) 2520 (ج) 7920 (د) $10!$

(٥) ما عدد المجموعات الجزئية المكونة من عددين غير متتالين من المجموعة $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 25\}$ ؟

(أ) 325 (ب) 310 (ج) 300 (د) 275

(٦) يتكون فصل من 12 طالباً نريد تقسيمهم إلى 3 فرق، كل فريق يتكون من أربعة طلاب. كم عدد الطرق المختلفة لإنجاز ذلك؟

(أ) 34650 (ب) 17325 (ج) 6775 (د) 5775

(٧) نريد اختيار لجنة مكونة من 4 مهندسين و 3 فنيين من بين 5 مهندسين و 6 فنيين. بكم طريقة يمكن تكوين اللجنة إذا رفض المهندسان أحمد ووضاح أن يكونا باللجنة نفسها؟

(أ) 100 (ب) 80 (ج) 60 (د) 40

(٨) كم عدد الكلمات الثنائية من الطول 8 التي تحتوي مرتبتين 1 على الأقل؟

(أ) 2^8 (ب) $2^8 - 9$ (ج) 2^7 (د) 2^6

(٩) فصل دراسي عدد طلابه 15. مقاعد الفصل الدراسي موزعة على صفين، الصف الأمامي وعدد مقاعده 8 والصف الخلفي وعدد مقاعده 10. بكم طريقة يمكن تجليس طلاب الفصل في الصفين إذا رفض 4 طلاب الجلوس في الصف الخلفي ورفض 5 طلاب الجلوس في الصف الأمامي؟

(أ) $6!\times 8!\times 10!$ (ب) $8!\times 10!$

(ج) $15\times 8!\times 10!$ (د) $31\times 8!\times 10!$

(١٠) ما عدد المجموعات الجزئية المكونة من عددين مجموعهما عدد زوجي من المجموعة $\{1,2,3,4,\ldots,20\}$؟

(أ) 90 (ب) 120 (ج) 240 (د) 720

(١١) ما عدد طرق ترتيب 5 حروف A و 7 حروف B بشرط أن لا يتجاور حرفا A؟

(أ) 45 (ب) 56 (ج) $5!\times 7!$ (د) $12!$

(١٢) ما عدد طرق اختيار خمس ورقات نقد من بين الفئات 1 ريـــال، 5 ريـــال، 10 ريـــال، 20 ريـــال، 50 ريـــال، 100 ريـــال، 200 ريـــال، 500 ريـــال مع توافر 5 ورقات نقد على الأقل من كل فئة ومع تجاهل

الترتيب في الاختيار؟

(أ) 462 (ب) 528 (ج) 720 (د) !13

(١٣) يقدم محل بيع عصائر ثلاثة أنواع مختلفة من العصائر. ما عدد طرق اختيار 7أكواب عصائر؟

(أ) 36 (ب) 48 (ج) 84 (د) !10

(١٤) ما عدد الكلمات التي نحصل عليها بترتيب حروف الكلمة $MOHAMMAD$؟

(أ) 420 (ب) 720 (ج) 3260 (د) 3360

(١٥) ما عدد حلول المعادلة $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$ حيث x_1 عدد صحيح موجب و x_2 ، x_3 ، x_4 ، x_5 أعداد صحيحة غير سالبة؟

(أ) $C(25,4)$ (ب) $C(24,4)$ (ج) $C(25,5)$ (ج) $C(24,5)$

(١٦) ما عدد حلول المعادلة في التمرين (١٥) إذا كانت جميع الأعداد x_i صحيحة وأكبر من أو تساوي 2؟

(أ) $C(16,3)$ (ب) $C(16,4)$ (ج) $C(15,4)$ (د) $C(21,4)$

(١٧) عدد أسئلة الاختبار النهائي لنظرية الأعداد يساوي 6 ومجموع درجاتها يساوي 50. ما عدد الطرق المختلفة لتحديد درجات لهذه الأسئلة بحيث تكون درجة كل منها على الأقل 5 درجات؟

(أ) $C(26,20)$ (ب) $C(26,19)$ (ج) $C(25,20)$ (د) $C(25,19)$

(١٨) كم عدد الكلمات الثنائية من الطول 8 التي تحتوي ثلاث مراتب 0 متجاورة وخمس مراتب 1؟

(أ) 6 (ب) 15 (ج) 24 (د) 56

(١٩) كم عدد ترتيبات حروف الكلمة $ABCDE$ التي لا تحتوي AB ولا تحتوي BE؟

(أ) 42 (ب) 78 (ج) 90 (د) 120

(٢٠) بكم طريقة يمكن وضع 7 مفاتيح مختلفة في علاقة مفاتيح دائرية؟

(أ) $7!$ (ب) $6!$ (ج) $\frac{7!}{2}$ (د) $\frac{6!}{2}$

(٢١) ما عدد طرق تجليس 3 أطفال و 7 نساء حول مائدة مستديرة بحيث لا يتجاور طفلان؟

(أ) $3!\times 7!$ (ب) $3!\times 6!$ (ج) $210\times 6!$ (د) $2!\times 6!$

(٢٢) نريد توزيع عشرة كتب رياضيات مختلفة على أحمد ومحمد وسلطان بحيث يأخذ أحمد خمسة كتب ومحمد ثلاثة كتب وسلطان كتابين. بكم طريقة يمكن توزيع الكتب؟

(أ) 420 (ب) 840 (ج) 1260 (د) 2520

(٢٣) وضعت حبات حلوى MM في أحد المتاجر بثلاثة أكوام حسب لون الحلوى، أزرق، أصفر، أحمر. ولغرض الدعاية للمحل يوزع صاحب المحل 8 حبات من الحلوى يختارها الطفل من بين الأكوام الثلاثة. بكم طريقة يستطيع الطفل محمد أن يختار حباته الثماني بشرط أن يختار على الأقل حبة واحدة من كل كوم؟

(أ) 15 (ب) 21 (ج) 45 (د) 60

(٢٤) [AIME 1983] ما أكبر قاسم أولي مكون من مرتبتين للعدد $C(200,100)$ ؟

(أ) 47 (ب) 59 (ج) 61 (د) 67

(٢٥) [AIME 1988]عرضت إحدى الشركات تصميماً لأبواب بأقفال رقمية حيث وضعت على الباب لوحة عليها الأرقام من 1إلى 10. يختار صاحب البيت 5من هذه الأرقام ليكون القفل الرقمي للباب ويتم فتح الباب بالضغط على الأرقام الخمسة بأي ترتيب. لنفرض أنه تم إعادة تصميم الأبواب بحيث يسمح بأن يكون الرقم السري مكوناً من مجموعات جزئية من المجموعة $\{1,2,3,\ldots,10\}$أعداد عناصرها من 1إلى 9. ما الزيادة في عدد الأقفال الذي سنحصل عليه؟

(أ) 252 (ب) 770 (ج) 1022 (د) 1024

(٢٦) [AIME1989]حددنا عشر نقاط على محيط دائرة. كم عدد المضلعات المحدبة التي يمكن رسمها باستخدام ثلاث أو أكثر من هذه النقاط؟

(أ) 56 (ب) 968 (ج) 512 (د) 1024

(٢٧) [UOSCHSMC 1993] ما عدد تباديل الأعداد $1,2,3,\ldots,9$ بشرط أن يظهر العدد 1على يمين العدد 2ويظهر العدد 3على يمين العدد 4ويظهر العدد 5على يمين العدد 6؟

(أ) $9!$ (ب) $9\times 8!$ (ج) $9\times 7!$ (د) $9\times 6!$

(٢٨) كم عدد الحلول الصحيحة غير السالبة الفردية للمعادلة $x_1+x_2+x_3=99$؟

(أ) 99 (ب) 512 (ج) 1035 (د) 1225

(٢٩) لدى السيد صالح سبعة أقارب، ثلاثة رجال وأربع نساء ولدى زوجته أيضاً سبعة أقارب، أربعة رجال وثلاث نساء. أراد الزوجان عمل وجبة عشاء

لستة أشخاص من أقاربهما على أن يكون المدعوون ثلاثة رجال وثلاث نساء وأن يكون ثلاثة منهم من أقارب السيد صالح وثلاثة من أقارب زوجته. بكم طريقة يمكنهما تنفيذ ذلك؟

(أ) 485 (ب) 324 (ج) 144 (د) 16

(٣٠) [AIME 1984] يريد السيد أبوعبدالله أن يزرع 3 شجرات رمان و 4 شجرات ليمون و 5 شجرات تفاح في صف واحد على الضلع الخلفي لسور حديقته المنزلية. نصحه المزارع أن لا يزرع شجرتي تفاح متجاورتين. ماعدد الطرق الممكنة لزرع هذه الأشجار؟

(أ) 1960 (ب) $12!$ (ج) $5!\times 9!$ (د) $3!\times 9!$

(٣١) في الرسم المبين صفان متوازيان من النقاط. الصف العلوي يحتوي 7 نقاط، المسافة بين كل نقطتين وحدة طول واحدة والصف السفلي يحتوي 9 نقاط، المسافة بين كل نقطتين وحدة طول واحدة والمسافة بين الصفين وحدتا طول. كم عدد أشباه المنحرفات التي ليست متوازيات أضلاع، التي يمكن تكوينها من هذه النقاط؟

• • • • • • •

• • • • • • • • •

(أ) 523 (ب) 756 (ج) $7!$ (د) $9!$

(٣٢) [AUST.MC1995] عدد أسئلة اختبار رياضيات يساوي 6. الدرجة التي يمكن أن يحصل عليها طالب عن كل من الأسئلة هي 0 أو 1 أو 2 أو 3. يمكن أن يحصل طالب على الدرجة 18 في الاختبار بطريقة واحدة فقط ويمكن أن يحصل على الدرجة 17 بست طرق. ما عدد طرق الحصول على

الدرجة 16؟

(أ) 12 (ب) 15 (ج) 21 (د) 42

(٣٣) [AUST.MC 1993]وضعنا أربعة مفاتيح كهرباء كل منها يمكن أن يكون بوضع ONأو وضع OFFفي صف واحد. بكم طريقة يمكن ترتيبها بحيث لا يتجاور مفتاحان بوضع OFF؟

(أ) 8 (ب) 10 (ج) 12 (د) 16

(٣٤) [AUST.MC 1992] نريد تلوين رقعة مربعة من النوع 4×4 بلونين: أبيض وأسود بحيث يلون مربعان من كل صف وكل عمود باللون الأبيض والمربعان الآخران باللون الأسود. الشكلان التاليان مثالان على هذا التلوين.



كم عدد التلوينات الممكنة؟

(أ) 36 (ب) 48 (ج) 86 (د) 90

(٣٥) [AUST.MC 1998]سيارة تتسع لراكب واحد في الكرسي الأمامي (غير السائق) وثلاثة ركاب في الكرسي الخلفي. كم عدد طرق تجليس أربعة ركاب إذا رفض أحدهم الجلوس في الكرسي الأمامي؟

(أ) 4 (ب) 6 (ج) 12 (د) 18

(٣٦) [AUST.MC 1994]نريد اختيار لجنة من 6أشخاص من بين 8طلاب و 6مدرسين على أن تحتوي اللجنة على 3طلاب على الأقل ومدرسَيْن على الأقل. كم عدد الطرق الممكنة لذلك؟

(أ) 1050 (ب) 1120 (ج) 2170 (د) 7560

(٣٧) [AUST.MC 1996] ما عدد طرق اختيار 3 أعداد مختلفة بترتيب تزايدي من المجموعة $\{1,2,3,...,10\}$ بحيث لا يكون أي عددين منهما متتاليين؟

(أ) 48 (ب) 54 (ج) 56 (د) 72

(٣٨) [MAΘ1998] كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من 4 عناصر مأخوذة من المجموعة $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ والتي تحتوي العدد 1 ولكنها لا تحتوي العدد 7؟

(أ) 10 (ب) 15 (ج) 24 (د) 35

(٣٩) [MAΘ1998] ما العدد الصحيح الموجب n الذي يحقق

$$C(n,1)+C(n,2)+C(n,3)=231$$ ؟

(أ) 11 (ب) 12 (ج) 15 (د) 18

(٤٠) [AUST.MC 2000] أراد الأعضاء المؤسسون لنادي تنس أرضي تنظيم مسابقة بين جميع أعضاء النادي بحيث يلعب كل من لاعبي النادي مع جميع الأعضاء الآخرين. وجد أن عدد المباريات بين جميع الأعضاء سيتجاوز 2000 مباراة مما يشكل عبئاً على النادي فقرروا إلغاء المباريات بين الأعضاء المؤسسين للنادي ليكون عدد المباريات 2001. ما عدد الأعضاء المؤسسين للنادي ؟

(أ) 3 (ب) 6 (ج) 8 (د) 10

(٤١) [AUST.MC 2001] ما حاصل جمع جميع الأعداد المكونة من أربع مراتب مأخوذة من المراتب 1,2,3,4 مع السماح بالتكرار؟

(أ) 700410 (ب) 711040 (ج) 714040 (د) 718140

(٤٢) ما عدد الكلمات المختلفة التي نحصل عليها من ترتيب حروف كلمة $COMMUNICATION$ بشرط أن يقع الحرف U بعد الحرف T ؟

(أ) $13!$ (ب) $\frac{13!}{2^5}$ (ج) $\frac{13!}{2^6}$ (د) $\frac{13!}{2^7}$

(٤٣) عدد لاعبي كرة القدم في أحد النوادي يساوي 16 لاعباً. أردنا اختيار فريق مكون من 11 لاعباً ليلعب إحدى المباريات وبحيث نحدد قائداً لهذ الفريق. كم عدد الطرق المختلفة لإنجاز ذلك؟

(أ) 38048 (ب) 40048 (ج) 42048 (د) 48048

(٤٤) أردنا صف 4 كتب رياضيات، 5 كتب فيزياء، 3 كتب كيمياء على أحد رفوف مكتبة بحيث نضع كتب الموضوع الواحد بجوار بعضها البعض. كم عدد الطرق المختلفة لإنجاز ذلك؟

(أ) 17280 (ب) 90280 (ج) 103680 (د) 120680

(٤٥) يتكون اختبار الرياضيات من 10 أسئلة مقسمة إلى مجموعتين كل منهما تحتوي على 5 أسئلة. المطلوب من الطالب أن يجيب عن 6 أسئلة بحيث يجيب عن سؤالين على الأقل من كل من المجموعتين. كم عدد الخيارات الممكنة للطالب؟

(أ) 50 (ب) 100 (ج) 150 (د) 200

(٤٦) عدد طلاب الصفوف الأول والثاني والثالث ثانوي في مدرسة عمر بن الخطاب الثانوية هو 25، 20، 15 على التوالي. بكم طريقة يمكن اختيار ستة طلاب من المدرسة للمشاركة في مسابقة الرياضيات الوطنية إذا أردنا أن نختار طالبين من كل صف؟

(أ) $C(60,6)$ (ب) $C(25,2)\times C(20,2)\times C(15,2)$

(ج) $C(20,2)\times C(40,4)$ (د) $\left[C(60,2)\right]^2$

(٤٧) اخترنا 10 طلاب من المدرسة A و 15 طالباً من المدرسة B و 20 طالباً من المدرسة C للمشاركة في تصفيات لعبة كرة الطاولة. ما عدد طرق فوز ستة طلاب بالمراكز الستة الأولى بشرط أن يكون 3 من الفائزين من المدرسة A ؟

(أ) $3!\times C(10,3)\times C(35,3)$ (ب) $3!\times P(10,3)\times P(35,3)$

(ج) $6!\times C(10,3)\times C(35,3)$ (د) $6!\times P(10,3)\times P(35,3)$

(٤٨) في حفل تخرج الصف الثالث ثانوي في مدرسة أبي بكر الصديق الثانوية طلب مدير المدرسة من المصور التقاط صورة جماعية لطلاب الصف وعددهم 30 طالباً مع مدرسيهم وعددهم 4 مدرسين. اقترح عليهم المصور أن يجلس المدرسون في الصف الأمامي وأن يقف الطلاب في الصف الخلفي على أن يقف الطالبان الأطول في بداية ونهاية صف الطلاب. بكم طريقة يمكن تجليس الطلاب؟

(أ) $48\times 28!$ (ب) $24\times 30!$ (ج) $12\times 30!$ (د) $8\times 28!$

(٤٩) ما عدد الكلمات المكونة من 7 حروف التي تستطيع تكوينها من الحروف الانجليزية A إلى Z والتي تحتوي على حرف مكرر على الأقل؟

(أ) 26^7 (ب) $26^7 - P(26,7)$

(ج) $26^7 - C(26,7)$ (د) $26^7 - 7!$

(٥٠) [PACAT] وضعنا 12 كرسياً مرقمة بالأعداد من 1 إلى 12 في صف واحد.

أردنا تجليس 4أشخاص على هذه الكراسي بحيث يجلس اثنان منهما على الكرسي رقم 1والكرسي رقم 8وأن لا يتجاور شخصان. كم عدد الطرق الممكنة لإنجاز ذلك؟

(أ) 360 (ب) 384 (ج) 432 (د) 470

(٥١) [PACAT] كم عدد الطرق الممكنة لوضع 5لعب مختلفة في 3صناديق متشابهة بحيث نضع في كل صندوق لعبة واحدة على الأقل؟

(أ) 20 (ب) 25 (ج) 480 (د) 600

(٥٢) اشترى مدرس الرياضيات 11هدية رمزية مختلفة وأراد أن يوزعها على 10 طلاب متميزين في الفصل من أجل تشجيعهم. كم عدد الطرق الممكنة لتوزيع الهدايا بحيث يأخذ كل طالب منهم على الأقل هدية واحدة؟

(أ) $10\times 10!$ (ب) $11\times 10!$ (ج) $10\times 11!$ (د) $\dfrac{11\times 10!}{2}$

(٥٣) أراد 25عضو هيئة تدريس من قسم الرياضيات تناول العشاء في أحد المطاعم الصينية. عند محاولتهم حجز مائدة في المطعم، أخبرهم مدير المطعم بعدم وجود مائدة مستديرة واحدة تتسع لهم جميعاً ولكن ما هو متوافر لديه هو ثلاث موائد مستديرة تتسع إحداها لعشرة أشخاص والثانية لثمانية أشخاص والثالثة لسبعة أشخاص. كم عدد الطرق الممكنة لتجليس 25عضو هيئة تدريس على الموائد الثلاثة؟

(أ) $\dfrac{25!}{560}$ (ب) $\dfrac{25!}{6!}$ (ج) $9!\times 7!\times 6!$ (د) $10!\times 8!\times 7!$

(٥٤) [PACAT] ادعى أحد خبراء تذوق الشاي بالحليب أن بإمكانه معرفة ما إذا كانت أوراق الشاي مضافة أولاً أو الحليب مضافاً أولاً إلى كوب الشاي

بالحليب بمجرد تذوقه. ولغرض اختبار صحة ادعاء الخبير قدم له 10 أكواب من الشاي بالحليب، خمسة منها أضيفت أوراق الشاي إليها قبل الحليب والخمسة أكواب الأخرى أضيف إليها الحليب قبل أوراق الشاي. كم عدد الطرق الممكنة لتقديم هذه الأكواب إلى الخبير؟

(أ) 240 (ب) 252 (ج) 300 (د) 340

(٥٥) [PACAT] عدد طرق ترتيب n من الأطفال في صف بحيث لا يتجاور ولدان ولا تتجاور بنتان يساوي m ($m > 100$). إذا أضفنا إلى المجموعة طفلاً واحداً يصبح عدد طرق ترتيب الأطفال كما هو موصوف أعلاه ثلاثة أمثال العدد السابق. ما قيمة n؟

(أ) 8 (ب) 9 (ج) 10 (د) 12

(٥٦) [PACAT] ما عدد ترتيبات حروف الكلمة $AMAZED$ بشرط وقوع الحرف E بين الحرفين A؟

(أ) 24 (ب) 72 (ج) 120 (د) 240

(٥٧) [PACAT] تتكون حروف اللغة الانجليزية من 11 حرفاً متناظراً (أي لا يتغير شكله إذا وضع أمام مرآة) وهي A، H، I، M، O، T، U، V، W، X، Z وباقي الحروف هي حروف غير متناظرة. كم عدد الكلمات المكونة من ثلاثة حروف مختلفة التي يمكن تكوينها بحيث يكون أحد حروفها على الأقل متناظراً؟

(أ) 12000 (ب) 12870 (ج) 13000 (د) 13870

(٥٨) [PACAT] عدد مكون من 7 مراتب مأخوذة من المرتبتين 2 و 3 فقط. كم عدداً من بين هذه الأعداد يكون مضاعفاً للعدد 12؟

(أ) 1 (ب) 11 (ج) 21 (د) 47

(٥٩) [PACAT] كم عدد ترتيبات أربع مراتب 0 ومرتبتي 1 ومرتبتي 2 بحيث يكون أول وقوع للمرتبة 1 قبل أول وقوع للمرتبة 2؟

(أ) 420 (ب) 360 (ج) 320 (د) 210

(٦٠) [PACAT] لدينا 8 صناديق كل منها يحتوي على عدد مختلف من حبات الحلوى (من حبة واحدة إلى 8 حبات). بكم طريقة يمكن توزيع أربعة من هذه الصناديق على أربعة أشخاص (كل منهم يأخذ صندوقاً واحداً) بحيث يحتوي صندوق الشخص الأول على أكبر عدد من حبات الحلوى وصندوق الشخص الثاني يحتوي على عدد أكبر من عددي صندوقي الشخصين الثالث والرابع وصندوق الشخص الثالث يحتوي على عدد أكبر من عدد صندوق الشخصالرابع؟

(أ) 70 (ب) 150 (ج) 210 (د) 240

إجابات المسائل غير المحلولة

(١) أ	(٢) ج	(٣) ج	(٤) ب	(٥) ج
(٦) د	(٧) د	(٨) ب	(٩) د	(١٠) أ
(١١) ب	(١٢) ب	(١٣) أ	(١٤) د	(١٥) ب
(١٦) ج	(١٧) ج	(١٨) أ	(١٩) ب	(٢٠) د
(٢١) ج	(٢٢) د	(٢٣) ب	(٢٤) ج	(٢٥) ب
(٢٦) ب	(٢٧) ج	(٢٨) د	(٢٩) أ	(٣٠) أ
(٣١) أ	(٣٢) ج	(٣٣) أ	(٣٤) د	(٣٥) د
(٣٦) ج	(٣٧) ج	(٣٨) أ	(٣٩) أ	(٤٠) ب
(٤١) ب	(٤٢) ج	(٤٣) د	(٤٤) ج	(٤٥) د
(٤٦) ب	(٤٧) ج	(٤٨) أ	(٤٩) ب	(٥٠) ب
(٥١) ب	(٥٢) ج	(٥٣) أ	(٥٤) ب	(٥٥) ج
(٥٦) ج	(٥٧) ب	(٥٨) ب	(٥٩) د	(٦٠) أ

الفصل الثالث

معاملات ذات الحدين
Binomial Coefficients

قدمنا في الفصل الثاني عدد طرق اختيار k من العناصر من مجموعة مكونة من n من العناصر حيث $k \leq n$ ووجدنا أن هذا العدد هو

$$C\left(n,k\right) = \frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$$

يسمى $C\left(n,k\right)$ معامل ذات حدين. يلعب هذا الحد دوراً مهماً في نظرية التركيبات وله العديد من الخصائص التي نقدم بعضاً منها في هذا الفصل ونبرهن معظم هذه الخصائص ببراهين جبرية وأخرى تركيبية، وغالباً يتم الحصول على البرهان التركيبي بإيجاد العدد المطلوب بطريقتين مختلفتين.

متطابقة باسكال [Pascal's Identity]

إذا كان n و k عددين صحيحين موجبين حيث $k \leq n$ فإن

$$C(n+1,k) = C(n,k-1) + C(n,k)$$

برهان جبري:

$$\begin{aligned} C(n,k-1)+C(n,k) &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= n!\left[\frac{1}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{1}{k!(n-k)!}\right] \\ &= n!\left[\frac{k+n-k+1}{k!(n-k+1)!}\right] \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{(n+1!)}{k!(n-k+1)!} \\ &= C(n+1,k) \end{aligned}$$

برهان تركيبي: لنفرض أن A مجموعة عدد عناصرها $n+1$ ولنفرض أن $a \in A$ وأن $B = A - \{a\}$. عدد المجموعات الجزئية من A التي تحتوي k من العناصر هو $C(n+1,k)$. ومن ناحية أخرى, أي مجموعة من A عدد عناصرها k إما أن تحتوي a مع $k-1$ من العناصر الأخرى (هذه العناصر تنتمي إلى B) أو أنها تحتوي على k من عناصر B ولا تحتوي a.

وبما أن $C(n,k-1)$ هوعدد المجموعات الجزئية من B التي تتكون من $k-1$ من العناصر فإن عدد المجموعات الجزئية من A التي عدد عناصرها k وتحتوي a هو $C(n,k-1)$ وإن عدد المجموعات الجزئية من A التي عدد عناصرها k ولا تحتوي a هو $C(n,k)$. إذن, استناداً إلى مبدأ الجمع نجد أن $C(n+1,k) = C(n,k-1) + C(n,k)$.

مثلث باسكال [Pascal's Triangle]

يمكن استخدام متطابقة باسكال لترتيب معاملات ذات الحدين على شكل مثلث يعرف بمثلث باسكال حيث أعداد الصف n من هذا المثلث هي معاملات ذات الحدين $C(n,k)$ لكل $k = 0,1,\dots,n$. الشكل التالي يبين الصفوف الثمانية الأولى من هذا المثلث

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & & & & & & C(0,0)= 1 & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\ & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\ 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \end{array}$$

لاحظ أن متطابقة باسكال تبين أنه عند جمع عددين متتاليين من صف واحد من صفوف المثلث نحصل على العدد الواقع بين هذين العددين في الصف الذي يليه. على سبيل المثال, $C(5,3) + C(5,4) = 10 + 5 = 15 = C(6,4)$.

مبرهنة ذات الحدين [The Binomial Theorem]

تسمى صيغة مجموع حدين, مثل $x + y$, $3x - y$, $x^2 + 2y$, $x - \dfrac{1}{x^2}$ صيغة ذات حدين. تقدم لنا مبرهنة ذات الحدين طريقة لحساب معاملات مفكوك $(x+y)^n$ حيث n عدد صحيح موجب كالتالي:

إذا كان x و y متغيرين وكان n عدداً صحيحاً موجباً فإن

$$(x+y)^n = C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y + C(n,2)x^{n-2}y^2 + \cdots + C(n,n-1)xy^{n-1} + C(n,n)y^n$$

برهان تركيبي: عند فك المقدار $(x+y)^n$ فإن الحدود التي تظهر في المفكوك تأخذ الصورة $Mx^{n-j}y^j$ حيث $j = 0,1,2,\ldots,n$ والعدد M هو عدد مرات ظهور الحد $x^{n-j}y^j$ في هذا المفكوك. لحساب M لاحظ أنه للحصول على الحد $x^{n-j}y^j$ يجباختيار عدد $n-j$ من المتغير x من بين n من المجاميع (حيث العدد j هو عدد مرات ظهور y في هذا الحد). إذن, المعامل M هو عدد طرق اختيار $n-j$ عنصراً من n من العناصر وهذا العدد هو $C(n,n-j) = C(n,j)$.

مثال(١) جد مفكوك المقدار $(3x-2)^6$.

الحل

$$\begin{aligned}(3x-2)^6 &= C(6,0)(3x)^6 + C(6,1)(3x)^5(-2)^1 + C(6,2)(3x)^4(-2)^2 \\ &\quad + C(6,3)(3x)^3(-2)^3 + C(6,4)(3x)^2(-2)^4 \\ &\quad + C(6,5)(3x)^1(-2)^5 + C(6,6)(-2)^6 \\ &= 729x^6 - 2916x^5 + 4860x^4 - 4320x^3 \\ &\quad + 2160x^2 - 576x + 64\end{aligned}$$

◇

مثال (٢) ما معامل x^3 في مفكوك $(x+2x^2)^2(1-2x)^5$؟

الحل

باستخدام مفكوك ذات الحدين نجد أن

$$
\begin{aligned}
(1-2x)^5 &= C(5,0)(1)^5 + C(5,1)1^4(-2x)^1 + C(5,2)1^3(-2x)^2 \\
&\quad + C(5,3)1^2(-2x)^3 + C(5,4)1(-2x)^4 + C(5,5)(-2x)^5 \\
&= 1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^4 - 32x^5
\end{aligned}
$$

أيضاً, $(x+2x^2)^2 = x^2 + 4x^3 + 4x^4$. الآن, نحصل على الحد x^3 في مفكوك $(x+2x^2)^2(1-2x)^5$ بجمع الحدود $-10x^3$, $4x^3$. أي أن $-10x^3 + 4x^3 = -6x^3$. ويكون معامل x^3 في المفكوك هو -6. ◇

ملحوظة

لاحظ أن عدد حدود مفكوك $(x+y)^n$ هو $n+1$ وأن الحد العام هو

$$T_{k+1} = C(n,k)x^{n-k}y^k$$

مثال(٣) جد الحد السابع في مفكوك $\left(3x - \dfrac{4}{x^2}\right)^{14}$.

الحل

الحد العام هو $T_{k+1} = C(14,k)(3x)^{14-k}\left(\dfrac{-4}{x^2}\right)^k$.

لإيجاد الحد السابع نضع $k = 6$ فنجد أن

$$T_7 = C(14,6)(3x)^8\left(\frac{-4}{x^2}\right)^6 = 3^8 \times 4^6 \times C(14,6)x^{-4}.$$ ◇

مثل (٤) جد معامل x^6 في مفكوك $\left(x^2 + \dfrac{4}{x}\right)^{12}$.

الحل

الحد العام هو

$$T_{k+1} = C(12,k)(x^2)^{12-k}\left(\frac{4}{x}\right)^k = C(12,k) \times 4^k \times x^{24-3k}.$$

ولإيجاد معامل x^6 نجد k الذي يحقق $24 - 3k = 6$. أي أن $k = 6$. إذن, $T_7 = C(12,6) \times 4^6 \times x^6$ ويكون المعامل هو $C(12,6) \times 4^6 = 3784704$. ◇

مجموع صفوف مثلث باسكال [Row – Sum of Pascal Triangle]

من الممكن كتابة عناصر مثلث باسكال على شكل صفوف وأعمدة على النحو التالي:

n	$C(n,0)$	$C(n,1)$	$C(n,2)$	$C(n,3)$	$C(n,4)$	$C(n,5)$	$C(n,6)$	$C(n,7)$	$C(n,8)$	مجموع الصفوف
0	1									1
1	1	1								2
2	1	2	1							4
3	1	3	3	1						8
4	1	4	6	4	1					16
5	1	5	10	10	5	1				32
6	1	6	15	20	15	6	1			64
7	1	7	21	35	35	21	7	1		128
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	256

وبالنظر إلى الجدول نجد أن مجموع كل من صفوف المثلث هي 2^0, 2^1, 2^2, 2^4 وهكذا. من ذلك لدينا المتطابقة التالية لمجموع كل من صفوف مثلث باسكال:

إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً فإن $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$.

برهان تركيبي: الطرف الأيمن هو عدد جميع المجموعات الجزئية من مجموعة عدد عناصرها n. ومن ناحية أخرى, عدد عناصر كل من هذه المجموعات الجزئية هو إما 0 أو 1 أو 2 أو ... n من العناصر. عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي على صفر من العناصر هو $C(n,0)$ وعدد المجموعات الجزئية التي تحتوي على عنصر واحد هو $C(n,1)$ وعدد المجموعات الجزئية التي تحتوي على عنصرين هو $C(n,2)$

وهكذا. إذن, $\sum_{k=0}^{n} C(n,k)$ هو عدد جميع المجموعات الجزئية من مجموعة عدد عناصرها n. وبهذا يكون

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$$

برهان جبري: باستخدام مبرهنة ذات الحدين لإيجاد مفكوك $2^n = (1+1)^n$ نجد

$$\begin{aligned} 2^n &= C(n,0)1^n \times 1^0 + C(n,1) \times 1^{n-1} \times 1^1 + \cdots + C(n,n) \times 1^0 \times 1^n \\ &= C(n,0) + C(n,1) + \cdots + C(n,n) = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \end{aligned}$$

مجموع أعمدة مثلث باسكال[Column-Sum of Pascal Triangle]

بالنظر إلى مثلث باسكال (كصفوف وأعمدة) نجد على سبيل المثال, أن مجموع أعداد العمود الثاني من الصف 0 إلى الصف 6 هو

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35$$

وهذا المجموع هو العدد الواقع في الصف السابع والعمود الثالث. بصورة عامة لدينا المتطابقة التالية لمجموع عناصر أعمدة مثلث باسكال والتي يمكن برهانها بطريقة الاستقراء الرياضي على عدد الصفوف n، ولهذا لن نقدم برهاناً لها:

مجموع عناصر عمود r من أعمدة مثلث باسكال من الصف 0 إلى الصف n يساوي العدد الواقع في الصف $n+1$ والعمود $r+1$. أي أن

$$\sum_{k=0}^{n} C(k,r) = C(n+1,r+1).$$

مجموع أقطار مثلث باسكال[Diagonal-Sum of Pascal Triangle]

يمكن النظر إلى العديد من أقطار مثلث باسكال. نقدم هنا متطابقة لأحد هذه الأقطار.

القطر الجنوبي الشرقي [Southeast Diagonal]

القطر الجنوبي الشرقي لمثلث باسكال هو القطر الذي يبدأ من العنصر العلوي الأيسر والمتجه إلى العنصر السفلي الأيمن. إذا نظرنا إلى مثلث باسكال نرى أن مجموع عناصر القطر الجنوبي الشرقي من الصف الثالث $(n = 2)$والعمود الأول $(k = 0)$إلى الصف السابع والعمود الخامس هو

n	$C(n,0)$	$C(n,1)$	$C(n,2)$	$C(n,3)$	$C(n,4)$
2	1				
3		3			
4			6		
5				10	
6					15
7					35

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35$$

وهذا المجموعهو العدد الواقع في الصف الثامن $(n = 7)$والعمود الخامس $(k = 4)$. وبصورة عامة لدينا المتطابقة التالية:

مجموع أول $n + 1$عنصراً من عناصر القطر الجنوبي الشرقي من الصف r والعمود 0 في مثلث باسكال يساوي العدد الواقع في الصف $r + n + 1$والعمود n (العدد الواقع مباشرة أسفل العدد الأخير في القطر). أي أن

$$\sum_{k=0}^{n} C(r + k, k) = C(r + n + 1, n).$$

برهان جبري: يمكن برهان هذه المتطابقة باستخدام خاصيتي التماثل ومجموع

أعمدة مثلث باسكال.فمن خاصية التماثل لدينا

$$C(r+k,k)=C(r+k,r+k-k)=C(r+k,r)$$

ولذا فإن $\sum_{k=0}^{n} C(r+k,k)=\sum_{k=0}^{n} C(r+k,r)$.

ولكن من متطابقة مجموع الأعمدة لدينا $\sum_{k=0}^{n} C(r+k,r)=C(r+n+1,r)$.

ومن خاصية التماثل مرة أخرى لدينا $C(r+n+1,r)=C(r+n+1,n)$.

وبالتالي نحصل على المتطابقة المطلوبة $\sum_{k=0}^{n} C(r+k,k)=C(r+n+1,n)$.

نقدم مزيداً من متطابقات معاملات ذات الحدين المشهورة.

متطابقةڤـــاندرموند [Vandermond`s Identity]

إذا كانت m , n , r أعداداً صحيحة غير سالبة بحث $r \le m+n$ فإن

$$C(m+n,r)=\sum_{k=0}^{r} C(m,r-k)C(n,k)$$

برهان تركيبي: لنفرض أن A و B مجموعتان منفصلتان حيث $|A|=m$ و $|B|=n$. عندئذ, عدد طرق اختيار r عنصراًمن عناصر $A\cup B$ هو $C(m+n,r)$.

ومن ناحية أخرى, يمكن اختيار r من عناصر $A\cup B$ على النحو التالي:

نختار k من عناصر B و $r-k$ من عناصر A حيث $0\le k\le r$. عدد طرق هذا الاختيار هو $C(n,k)C(m,r-k)$. إذن, عدد طرق اختيار r من عناصر $A\cup B$

هو $\sum_{k=0}^{r} C(m,r-k)C(n,k)$. وذلك هو مجموع عدد طرق الاختيار لحالات عدد ما k . وبهذا يكون $C(m+n,r) = \sum_{k=0}^{r} C(m,r-k)C(n,k)$.

برهان جبري: لاحظ أن $C(m+n,r)$ هو معامل x^r في مفكوك $(1+x)^{m+n}$ وأن معامل x^r في مفكوك $\sum_{k=0}^{r} C(m,r-k)C(n,k)$ هو $(x+1)^m(1+x)^n$. وبما أن $(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$ فإننا نحصل على المطلوب.

متطابقة الامتصاص [Absorption Identity]

إذا كان $0 \le k \le n$ فإن $kC(n,k) = nC(n-1,k-1)$.

برهان تركيبي: لنفرض أننا نريد اختيار لجنة مكونة من k شخصاً من مجموعة أشخاص عددهم n ونعين لها رئيساً.يمكن اختيار اللجنة بعدد من الطرق يساوي $C(n,k)$.وبعد ذلك نختار رئيساً من بين أعضاء اللجنة وعددهم k بعدد من الطرق يساوي k . إذن, عدد اللجان الممكنة هو $kC(n,k)$.

أو يمكن اختيار رئيس اللجنة أولاًبعدد من الطرق يساوي n ومن ثم نختار $k-1$ عضواً من بين $n-1$ شخصاً بعدد من الطرق يساوي $C(n-1,k-1)$. إذن, $kC(n,k) = nC(n-1,k-1)$.

برهان جبري:

$$kC(n,k) = \frac{k \times n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!}$$

$$= \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = nC(n-1,k-1)$$

متطابقة مضرب الهوكي[Hockey Stick Identity]

إذا كان k و n عددين صحيحين حيث $0 \le k \le n$ فإن

$$C(k,k) + C(k+1,k) + \cdots + C(n,k) = C(n+1,k+1)$$

برهان تركيبي: الطرف الأيمن هو عدد طرق اختيار $k+1$ من أعداد المجموعة $A = \{1,2,3,\ldots,n+1\}$. سنبرهن الآن أن الطرف الأيسر هو أيضاً عدد طرق اختيار $k+1$ من أعداد المجموعة حسباختيار أصغر هذه الأعداد.

عدد اختيار $k+1$ من أعداد A بحيث يكون 1 هو أصغر هذه الأعداد هو عدد اختيار k من الأعداد من المجموعة $\{2,3,\ldots,n+1\}$ وهذا يساوي $C(n,k)$.

عدد اختيار $k+1$ من أعداد A بحيث يكون 2 هو أصغر هذه الأعداد هو عدد اختيار k من الأعداد من المجموعة $\{3,4,\ldots,n+1\}$ وهذا يساوي $C(n-1,k)$.

وهكذا. لاحظ أن $C(k,k)$ هو عدد اختيار $k+1$ من أعداد A بحيث يكون $n-k$ هو أصغر هذه الأعداد. الآن, استناداً إلى مبدأ الجمع يكون الطرف الأيسر هو عدد طرق اختيار $k+1$ من أعداد المجموعة A ومن ثم فهو يساوي الطرف الأيمن.

برهان جبري: من متطابقة باسكال نعلم أن

$$C(n+1,k) = C(n,k-1) + C(n,k)$$

أي أن

$$C(n,k-1) = C(n+1,k) - C(n,k)$$

من ذلك نرى أن الطرف الأيسر يساوي

$$\begin{aligned} &C(k,k) + C(k+2,k+1) - C(k+1,k+1) \\ &\quad + C(k+3,k+1) - C(k+2,k+1) + \cdots \\ &\quad + C(n+1,k+1) - C(n,k+1) \\ &= C(n+1,k+1) \end{aligned}$$

ملحوظة

جاءت تسمية هذه المتطابقة من أنه لو تتبعنا أعداد المجموع في الطرف الأيسر وناتج المجموع في الطرف الأيمن على مثلث باسكال لوجدنا أن هذه الأعداد تكون شكلاً يشبه مضرب لعبة الهوكي.

مسائل محلولة

(١) جد الحد التاسع في مفكوك $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^{21}$.

(٢) جد معامل x^{12} في مفكوك $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^{12}$.

(٣) جد الحد الثابت في مفكوك $\left(x+\frac{2}{x^2}\right)^{15}$.

(٤) جد الحد الأوسط في مفكوك $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^{10}$.

(٥) جد معامل x^5 في مفكوك $(x-2)(x^2+1)^8$.

(٦) إذا كان $(1+rx)^n=1-12x+60x^2-\cdots$ فجد القيمتين n و r.

(٧) أثبت أن

$$C(n,0)-C(n,1)+C(n,2)-C(n,3)+\cdots+(-1)^nC(n,n)=0$$

(٨) احسب قيمة $\sum_{k=0}^{n}C(n,k)2^k$.

(٩) أثبت أن $\sum_{k=1}^{n}kC(n,k)=n2^{n-1}$.

(١٠) ما قيمة المقدار $\sum_{k=0}^{n}(k+1)C(n,k)$؟

(١١) مامعامل $x^3y^5z^4$ في مفكوك $(x+y+z)^{12}$؟

(١٢) أثبت أن

$$2\times1\times C(n,2)+3\times2\times C(n,3)+4\times3\times C(n,4)+\\ \cdots+n(n-1)C(n,n)=n\left(n-1\right)2^{n-2}$$

(١٣) [AIME 1986] إذا كتبنا كثيرة الحدود

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^{16} - x^{17}$$

على الصورة $a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_{16} y^{16} + a_{17} y^{17}$ حيث $y = x + 1$, a_i أعداد ثابتة فما قيمة a_2 ؟

(١٤) [AIME 1991] باستخدام مبرهنة ذات الحدين لفك المقدار $(1+0.2)^{1000}$ نجد أن

$$\begin{aligned}(1+0.2)^{1000} &= C(1000,0)(0.2)^0 + C(1000,0.2)^1 \\ &+ C(1000,2)(0.2)^2 + \cdots + C(1000,1000)(0.2)^{1000} \\ &= A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{1000}\end{aligned}$$

حيث $A_k = C(1000,k)(0.2)^k$, $k = 0,1,\cdots,1000$. ما قيمة k التي تجعل A_k أكبر ما يمكن ؟

(١٥) [AIME 1993] لتكن $P_0(x) = x^3 + 313x^2 - 77x - 8$ ولتكن $P_n(x) = P_{n-1}(x-n)$ لكل $n \ge 1$.

مامعامل x في كثيرة الحدود $P_{20}(x)$ ؟

(١٦) [AIME 1996] جد أصغر عدد صحيح موجب n بحيث يحتوي المفكوك $(xy - 3x - 7y - 21)^n$ على 1996 حداً مختلفاً على الأقل.

(١٧) [AIME 2000 II] لنفرض أن

$$\frac{1}{2!\times 17!} + \frac{1}{3!\times 16!} + \frac{1}{4!\times 15!} + \frac{1}{6!\times 13!} + \frac{1}{7!\times 12!} + \frac{1}{8!\times 11!} + \frac{1}{9!\times 10!} = \frac{n}{1!\times 18!}$$

ماأكبر عدد صحيح أصغر من $\frac{n}{100}$ ؟

(١٨) [MAΘ 1992] ما قيمة $\sum_{i=1}^{10}\sum_{k=1}^{i} C(i,k)$؟

(١٩) [MAΘ 1992] جد قيمة المجموع

$$44C(45,0) + 43C(45,1) + 42C(45,2) + \cdots + 0C(45,44) - C(45,45)$$

(٢٠) جد مجموع معاملات حدود المفكوك $(2a - b + 3c - 5d)^{10}$.

(٢١) إذا كان n عدداً زوجياً فأثبت أن

$$C(n,1) + 3C(n,3) + 5C(n,5) + \cdots + (n-1)C(n,n-1) = n2^{n-2}$$

(٢٢) أثبت أن $\sum_{k=1}^{n} C(n,k)C(n,k-1) = C(2n,n-1)$.

(٢٣) أثبت أن $\sum_{k=1}^{n} k^2 C(n,k) = n(n+1)2^{n-2}$.

(٢٤) [AIME 1992]ماالصف من صفوف مثلث باسكال الذي يحتوي على ثلاثة أعداد متتالية النسبة بينها $3:4:5$؟

(٢٥) جد قيمة $\dfrac{\sum_{i=k}^{n} iC(i-1,k-1)}{C(n,k)}$.

(٢٦) أثبت أن $\sum_{i=0}^{k} C(n,i)C(n-i,k-i) = 2^k C(n,k)$.

(٢٧) أثبت أن $\sum_{k=1}^{n} C(n,k)C(n,n-k+1) = C(2n,n+1)$.

(٢٨) جد قيمة $\sum_{k=1}^{20} C(20,k)C(20,k-1)$ [إرشاد: استخدم المسألة (٢٧)].

(٢٩) جد قيمة $\sum_{k=0}^{20} C(50,k)C(50-k,20-k)$.

(٣٠) إذا كان $\frac{4}{5} = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{C(n,k)}{C(n,k)+C(n,k+1)}\right]^3$ فما قيمة n؟

حلول المسائل

(١) جد الحد التاسع في مفكوك $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{21}$.

الحل

الحد العام في المفكوك هو $T_{k+1} = C(21,k)(2x^2)^{21-k}\left(\frac{-1}{x}\right)^k$.

ولإيجاد الحد التاسع نضع $k = 8$ فنجد أن

$$T_9 = C(21,8)(2x^2)^{13}\left(\frac{-1}{x}\right)^8 = 2^{13}C(21,8)x^{26} \times x^{-8} = 2^{13}C(21,8)x^{18}.$$

(٢) جد معامل x^{12} في مفكوك $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$.

الحل

الحد العام في المفكوك هو

$$T_{k+1} = C(12,k)(2x^2)^{12-k}\left(\frac{-1}{x}\right)^k = (-1)^k C(12,k) \times 2^{12-k}x^{24-3k}.$$

ولذا فإن $24 - 3k = 12$. أي أن $k = 4$. إذن, معامل x^{12} هو

$$T_5 = C(12,4) \times 2^8 = 126720.$$

(٣) جد الحد الثابت في مفكوك $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^{15}$.

الحل

الحد العام في المفكوك هو

$$T_{k+1} = C(15,k)x^{15-k}\left(\frac{2}{x^2}\right)^k = C(15,k) \times 2^k x^{15-3k}.$$

لإيجاد الحد الثابت نضع $15 - 3k = 0$. أي أن $k = 5$. إذن, الحد الثابت هو $T_6 = C(15,5) \times 2^5 = 96096$.

(٤) جد الحد الأوسط في مفكوك $\left(2x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^{10}$.

الحل

عدد الحدود في المفكوك يساوي 11. لذا فإن الحد الأوسط هو الحد السادس. أي أن $k = 5$. ويكون $T_6 = C(10,5)(2x^2)^5\left(\dfrac{-1}{x}\right)^5 = -8064x^5$.

(٥) جد معامل x^5 في مفكوك $(x-2)(x^2+1)^8$.

الحل

$$(x+2)(x^2+1)^8 = x(x^2+1)^8 + 2(x^2+1)^8$$

ولذا فإن الحد الذي يحتوي على x^5 هو مجموع الحد الذي يحتوي x^4 والحد الذي يحتوي x^5 فيالمفكوكين. الآن, $T_{k+1} = C(8,k)(x^2)^k = C(8,k)x^{2k}$. وبوضع $2k = 4$ نجد أن $k = 2$. وبما أن $2k \neq 5$ فنرى عدم وجود حد يحتوي x^5 في المفكوك $2(x^2+1)^8$. إذن, الحد الذي يحتوي x^5 هو فقط T_3 في مفكوك $x(x^2+1)^8$. أي أن هذا الحد هو $C(8,2)x^4 \times x = 28x^5$ ومعامله هو 28.

(٦) إذا كان $(1+rx)^n = 1 - 12x + 60x^2 - \cdots$ فجد القيمتين n و r.

الحل

من مفكوك ذات الحدين لدينا

$$(1+rx)^n = 1 + nrx + \frac{n(n-1)}{2}r^2x^2 + \cdots$$

وبمقارنة معاملات كثيرتي الحدود نجد أن

$$nr = -12 \quad (١)$$

$$\frac{n(n-1)}{2}r^2 = 60 \quad (٢)$$

بإيجاد قيمة r من المعادلة الأولى والتعويض عنها في المعادلة الثانية نجد أن

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{144}{n^2} &= 60 \\ 72(n-1) &= 60n \\ 72n - 72 &= 60n \\ 12n &= 72 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

ومن ذلك نجد أن $r = \frac{-12}{n} = -2$. إذن, $n = 6$ و $r = -2$.

(٧) أثبت أن

$$C(n,0) - C(n,1) + C(n,2) - C(n,3) + \cdots + (-1)^n C(n,n) = 0$$

الحل

باستخدام مفكوك ذات الحدين $(x+y)^n$ عندما يكون $x = 1$ و $y = -1$ نجد أن

$$0 = (1 + (-1))^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)1^{n-k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n,k) .$$

(٨) احسب قيمة $\sum_{k=0}^{n} C(n,k)2^k$.

الحل

لاحظ أن

$$.\, 3^n = (1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)1^{n-k}2^k = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)2^k$$

(٩) أثبت أن $\sum_{k=1}^{n} kC(n,k) = n2^{n-1}$.

حل جبري:

من متطابقة الامتصاص لدينا $kC(n,k) = nC(n-1,k-1)$ ولذا فإن المجموع يساوي

$$nC(n-1,0) + nC(n-1,1) + nC(n-1,2) + \cdots + nC(n-1,n-1)$$
$$= n[C(n-1,0) + C(n-1,1) + \cdots + C(n-1,n-1)]$$
$$= n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$$

حل تركيبي:

لنفرض أننا نريد اختيار لجنة ومن ثم نعين رئيساًلها من بين أشخاص عددهم n .يمكن اختيار الرئيس أولاً بعدد من الطرق يساوي n ومن ثم نختار اللجنة من بين $n-1$ من الأشخاص بعدد من الطرق يساوي 2^{n-1}(أي شخص إما أن يكون عضواً في اللجنة أو لا يكون). وبهذا فعدد الطرق هو $n2^{n-1}$.

ومن ناحية أخرى, عدد طرق اختيار لجنة مكونة من k عضواً من بين n شخصاً يساوي $C(n,k)$. بعد اختيار اللجنة يمكن اختيار رئيس لها بعدد من الطرق يساوي k . إذن, عدد طرق اختيار لجنة مكونة من k عضواً ومن ثم اختيار رئيس لها يساوي $kC(n,k)$. وبهذا يكون عدد اختيار جميع اللجان ورئيس لكل منها هو $\sum_{k=1}^{n} kC(n,k)$.إذن, $\sum_{k=1}^{n} kC(n,k) = n2^{n-1}$.

(١٠) ما قيمة المقدار $\sum_{k=0}^{n} (k+1)C(n,k)$ ؟

الحل

لاحظ أن

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)C(n,k) = \sum_{k=0}^{n}C(n,k) + \sum_{k=1}^{n}kC(n,k) = 2^n + n2^{n-1} \; .$$

وذلك استناداً إلى متطابقة مجموع صفوف مثلث باسكال والمسألة(٩).

(١١) مامعامل $x^3y^5z^4$ في مفكوك $(x+y+z)^{12}$؟

الحل

بوضع $a = x+y$ نبحث أولاً عن الحد الذي يحتوي z^4 في مفكوك $(a+z)^{12}$ وهو $C(12,4)a^8z^4$. الآن, الحد الذي يحتوي x^3y^5 في مفكوك $a^8 = (x+y)^8$ هو $C(8,5)x^3y^5$. إذن، معامل $x^3y^5z^4$ هو

$$C(12,4) \times C(8,5) = \frac{12!}{3! \times 4! \times 5!} \; .$$

(١٢) أثبت أن

$$2 \times 1 \times C(n,2) + 3 \times 2 \times C(n,3) + 4 \times 3 \times C(n,4) + \cdots + n(n-1)C(n,n) = n\big(n-1\big)2^{n-2}$$

الحل

بتطبيق المتطابقة $kC(n,k) = nC(n-1,k-1)$ مرتين نجد أن

$$\begin{aligned}
2 \times 1 \times C(n,2) &= nC(n-1,1) = n(n-1)C(n-2,0)\\
3 \times 2 \times C(n,3) &= 2nC(n-1,2) = n(n-1)C(n-2,1)\\
4 \times 3 \times C(n,4) &= 3nC(n-1,3) = n(n-1)C(n-2,2)\\
&\vdots\\
n(n-1)C(n,n) &= n(n-1)C(n-1,n-1) = n(n-1)C(n-2,n-2)
\end{aligned}$$

من ذلك نرى أن الطرف الأيسر من المتطابقة يساوي

$$n(n-1)[C(n-2,0)+C(n-2,1)+\cdots+C(n-2,n-2)] = n(n-1)2^{n-2}$$

(١٣) [AIME 1991] باستخدام مبرهنة ذات الحدين لفك المقدار $(1+0.2)^{1000}$ نجد أن

$$\begin{aligned}(1+0.2)^{1000} &= C(1000,0)(0.2)^0 + C(1000,0.2)^1 \\ &\quad + C(1000,2)(0.2)^2+\cdots+C(1000,1000)(0.2)^{1000} \\ &= A_0+A_1+A_2+\cdots+A_{1000}\end{aligned}$$

حيث $A_k = C(1000,k)(0.2)^k$, $k=0,1,\cdots,1000$.

ما قيمة k التي تجعل A_k أكبر ما يمكن ؟

الحل

لاحظ أننا إذا وجدنا أكبر قيمة للعدد k التي تجعل A_k أكبر ما يمكن فإن جميع القيم بعد A_k تكون أصغر من A_k . إذن, نريد إيجاد أكبر قيمة تحقق

$$\left(\frac{1}{5}\right)^k C(1000,k) > \left(\frac{1}{5}\right)^{k+1} C(1000,k+1)$$

$$\frac{1000!}{k!(1000-k)!} > \frac{1000!}{5(k+1)!(1000-k-1)!}$$

$$\frac{1}{k!(1000-k)(1000-k-1)!} > \frac{1}{5(k+1)k!(1000-k-1)!}$$

$$\frac{1}{1000-k} > \frac{1}{5(k+1)}$$

$$5k+5 > 1000-k$$

$$k > 165.8$$

وبما أن k عدد صحيح فنجد أن أكبر قيمة للعدد k تحقق المطلوب هي 166.

(١٤) [AIME 1986] إذا كتبنا كثيرة الحدود

$$1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{16}-x^{17}$$

على الصورة $a_0 + a_1y + a_2y^2 + \cdots + a_{16}y^{16} + a_{17}y^{17}$
حيث $y = x + 1$ ، a_i أعداد ثابتة فما قيمة a_2؟

الحل

بما أن $x = y - 1$ فإن.

$$\begin{aligned}1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^{16} - x^{17} \\ = 1 - (y-1) + (y-1)^2 - (y-1)^3 + \cdots - (y-1)^{17} \\ = 1 + (1-y) + (1-y)^2 + (1-y)^3 + \cdots + (1-y)^{17}\end{aligned}$$

وبهذايكون المطلوب إيجاد معامل y^2 لكل من هذه الحدود ثم جمع هذه المعاملات.
استناداً إلى مبرهنة ذات الحدين نجد أن مجموع هذه المعاملات هو

$$C(2,2) + C(3,2) + \cdots + C(17,2)$$

واستناداً إلى متطابقة مضرب الهوكي نجد أن هذا العدد يساوي

$$C(18,3) = \frac{18!}{3! \times 15!} = 816 \, .$$

(١٥) [AIME 1996] جد أصغر عدد صحيح موجب n بحيث يحتوي المفكوك $(xy - 3x + 7y - 21)^n$ على 1996 حداً مختلفاً على الأقل.

الحل

لاحظ أولاً أن

$$xy - 3x + 7y - 21 = x(y-3) + 7(y-3) = (y-3)(x+7)$$

من ذلك يكون

$$\left(xy - 3x + 7y - 21\right)^n = (y-3)^n(x+7)^n$$

كل من مفكوكي $(y-3)^n$ و $(x+7)^n$ يحتوي على $n+1$ من الحدودالمختلفة.
ومن ثم فحاصل ضربهما يحتوي على $(n+1)^2$ من الحدود. جميع هذه الحدود

مختلفة ما عدا الحدين الثابتين. ولذا يكون المطلوب هو إيجاد أصغرعدد صحيح موجب n يحقق $(n+1)^2 - 1 \geq 1996$. أي $(n+1)^2 \geq 1997$.أصغر مربع بعد 1997هو $45^2 = 2005$. إذن, $n + 1 = 45$.وبهذا يكون $n = 44$.

(١٦) [AIME 1993] لتكن $P_0(x) = x^3 + 313x^2 - 77x - 8$ ولتكن $P_n(x) = P_{n-1}(x-n)$ لكل $n \geq 1$.ما قيمة معامل x في كثيرة الحدود $P_{20}(x)$ ؟

الحل

لاحظ أولاً أن

$$\begin{aligned} P_{20}(x) &= P_{19}(x-20) \\ &= P_{18}\left(x-(20+19)\right) \\ &= P_{17}\left(x-(20+19+18)\right) \\ &\vdots \\ &= P_0\left(x-(20+19+18+\cdots+2+1)\right) \end{aligned}$$

ولكن $210 = \dfrac{20 \times 21}{2} = 20 + 19 + 18 + \cdots + 2 + 1$. إذن, $P_{20}(X) = P_0(X-210)$. أي أن

$$P_{20}(x) = (x-210)^3 + 313(x-210)^2 - 77(x-210) - 8$$

باستخدام مبرهنة ذات الحدين لدينا:

معامل x في مفكوك $(x-210)^3$ يساوي $C(3,1)(210)^2 = 132300$. معامل x في مفكوك $313(x-210)^2$ يساوي $-313C(2,1) \times 210 = -131460$.

معامل x في المقدار $-77(x-210)$ هو -77 .

إذن, معامل x في $P_{20}(x)$ يساوي $132300 - 131460 - 77 = 763$.

(١٧) [AIME 2000 II] لنفرض أن

$$\frac{1}{2!\times 17!}+\frac{1}{3!\times 16!}+\frac{1}{4!\times 15!}+\frac{1}{6!\times 13!}+\frac{1}{7!\times 12!}+\frac{1}{8!\times 11!}+\frac{1}{9!\times 10!}=\frac{N}{1!\times 18!}$$

ماأكبر عدد صحيح أصغر من $\frac{N}{100}$؟

الحل

بضرب طرفي المعادلة بالعدد $19!$ نحصل على

$$C(19,2)+C(19,3)+\cdots+C(19,8)+C(19,9)=19N$$

وبما أن $\sum_{n=0}^{19} C(19,n)=2^{19}$ وأن $C(19,n)=C(19,19-n)$ نجد أن

$\sum_{n=0}^{9} C(19,n)=\frac{2^{19}}{2}=2^{18}$. إذن,

$$19N=2^{18}-C(19,1)-C(19,0)=2^{18}-19-1=262124.$$

وبهذا فإن $N=\frac{262124}{19}=13796$ وإن $\frac{N}{100}=137.96$. وبهذا يكون 137 هو أكبر عدد صحيح أصغر من $\frac{N}{100}$.

(١٨) [MAΘ 1992] ما قيمة $\sum_{i=1}^{10}\sum_{k=1}^{i} C(i,k)$؟

الحل

لاحظ أولاً أن

$$\sum_{k=1}^{i} C(i,k)=C(i,1)+C(i,2)+\cdots+C(i,i)=2^{i}-1.$$

إذن,

$$.\sum_{i=1}^{10}\sum_{k=1}^{i}C(i,k)=\sum_{i=1}^{10}(2^i-1)=2046-10=2036$$

(١٩) [MAΘ 1992] جد قيمة المجموع

$$44C(45,0)+43C(45,1)+42C(45,2)+\cdots+0C(45,44)-C(45,45)$$

الحل

لاحظ أولاً أن

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k-1)C(n,k)=\sum_{k=0}^{n}(n-k)C(n,k)-\sum_{k=0}^{n}C(n,k)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(n-k)C(n,n-k)-2^n=\sum_{j=0}^{n}jC(n,j)-2^n$$ (بوضع $j=n-k$)
$$=n2^{n-1}-2^n$$

الآن, بوضع $n=45$ نجد أن $n2^{n-1}-2^n=45\times 2^{44}-2^{45}=43\times 2^{44}$.

(٢٠) جد مجموع معاملات حدود المفكوك $(2a-b+3c-5d)^{10}$.

الحل

لاحظ أن كل حد من حدود المفكوك هو عبارة عن حاصل ضرب عدد ببعض قوى a, b, c, d. ولإيجاد كل من معاملات هذه الحدود نضع $a=b=c=d=1$. وبهذا تكون الصيغة التي نحصل عليها هي مجموع المعاملات.أي أن مجموع المعاملات هو $1=(-1)^{10}=(2-1+3-5)^{10}$.

(٢١) إذا كان n عدداً زوجياً فأثبت أن

$$C(n,1)+3C(n,3)+5C(n,5)+\cdots+(n-1)C(n,n-1)=n2^{n-2}$$

الحل

لنفرض أن

$$S = C(n,1) + 3C(n,3) + 5C(n,5) + \cdots + (n-1)C(n,n-1)$$

باستخدام المتطابقة $C(n,k) = C(n,n-k)$ نجد أن

$$S = (n-1)C(n,1) + (n-3)C(n,3) + \cdots + 1C(n,1)$$

بالجمع نجد أن

$$2S = n[C(n,1) + C(n,3) + \cdots + C(n,n-1)]$$

وبما أن

$$C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + C(n,3) + \cdots + C(n,n) = 2^n$$

فإننا نجد أن

$$C(n,1) + C(n,3) + \cdots + C(n,n-1) = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$$

إذن, $2S = n2^{n-1}$. وبهذا يكون $S = n2^{n-2}$:

لاحظ أيضاً أن حل هذه المسألة يثبت أيضاًالمتطابقة:

$$2C(n,2) + 4C(n,4) + 6(n,6) + \cdots + nC(n,n) = n2^{n-2}$$

عندما يكون n زوجياً.

(٢٢) أثبت أن $\sum_{k=1}^{n} C(n,k)C(n,k-1) = C(2n,n-1)$.

الحل

باستخدام المتطابقة $C(n,k) = C(n,n-k)$ يكون المطلوب إثبات أن

$$\sum_{k=1}^{n} C(n,n-k)C(n,k-1) = C(2n,n-1)$$

نقدم برهاناً تركيبياً لهذه المتطابقة.

عدد طرق اختيار لجنة مكونة من $n-1$ عضواً من بين n من الأطباء و n من المرضين يساوي $C(2n, n-1)$. ومن ناحية أخرى يمكن تكوين هذه اللجنة باختيار $n-k$ طبيباً و $k-1$ ممرضاً بعدد من الطرق $C(n, n-k)C(n, k-1)$ حيث $k = 1, \cdots, n$. وبالجمع نجد أن هذا هو عدد طرق اختيار $n-1$ عضواً من بين $2n$ شخصاً وهو الطرف الأيمن.

(٢٣) أثبت أن $\sum_{k=1}^{n} k^2 C(n,k) = n(n+1)2^{n-2}$.

الحل

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C(n,k) = \sum_{k=0}^{n} k^2 C(n,k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (k^2 - k)C(n,k) + \sum_{k=0}^{n} kC(n,k)$$

$$= \sum_{k=2}^{n-2} \frac{n(n-1)}{k(k-1)}(k^2 - k)C(n-2, k-2) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{k} \times kC(n-1, k-1)$$

$$= n(n-1)\sum_{k=2}^{n-2} C(n-2, k-2) + n\sum_{k=1}^{n-1} C(n-1, k-1)$$

$$= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$$

(٢٤) [AIME 1992] ماالصف من صفوف مثلث باسكال الذي يحتوي على ثلاثة أعداد متتالية النسبة بينها $3 : 4 : 5$؟

الحل

لنفرض أن رقم الصف الذي يحقق الشرط هو n. لاحظ أن أعداد صف مثلث

باسكال هي $C(n,0), C(n,1), C(n,2), \cdots, C(n,n)$.

لنفرض إذن, أن الثلاثة أعداد المتتالية هي $C(n,k)$, $C(n,k+1)$, $C(n,k+2)$.
من ذلك نرى أن:

$$\frac{3}{4} = \frac{C(n,k)}{C(n,k+1)} \quad \text{و} \quad \frac{4}{5} = \frac{C(n,k+1)}{C(n,k+2)}.$$

أي أن:

$$\frac{3}{4} = \frac{k+1}{n-k} \quad \text{أو} \quad \frac{4}{5} = \frac{k+2}{n-k-1}.$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد أن $n = 62$ و $k = 26$.وبهذا يكون الصف هو الصف 62 والأعداد هي $C(62,26)$, $C(62,27)$, $C(62,28)$.

(٢٥) جد قيمة $\dfrac{\sum_{i=k}^{n} iC(i-1,k-1)}{C(n,k)}$.

الحل

لاحظ أولاً استناداً إلى متطابقة الامتصاص

$iC(i-1,k-1) = kC(i,k)$. ومن ذلك نجد أن

$$\sum_{i=k}^{n} \frac{iC(i-1,k-1)}{C(n,k)} = \frac{i = \sum_{i=k}^{n} kC(i,k)}{C(n,k)}$$

ولكن باستخدام متطابقة مضرب الهوكي لدينا $C(n+1,k+1) = \sum_{i=k}^{n} C(i,k)$.

إذن, $\dfrac{k(n+1)}{(k+1)} = \dfrac{kC(n+1,k+1)}{C(n,k)} = \dfrac{\sum_{i=k}^{n} kC(i,k)}{C(n,k)}$.

(٢٦) أثبت أن $\sum_{i=0}^{k} C(n,i)C(n-i,k-i) = 2^k C(n,k)$.

الحل

الطرف الأيمن هو عدد طرق اختيار k كرة من بين n من الكرات ومن ثم تلوين كل من هذه الكرات بأحد اللونين الأبيض أو الأصفر. ومن ناحية أخرى يمكن إنجاز ذلك باختيار i من الكرات وتلوينها باللون الأبيض بعدد من الطرق يساوي $C(n,i)$ ومن ثم اختيار $k-i$ من الكرات من $n-i$ كرة وتلوينها باللون الأصفر بعدد من الطرق $C(n-i,k-i)$. إذن, عدد طرق اختيار k كرة من بين n كرة وتلوينها باللون الأبيض أو الأصفريساوي $\sum_{i=0}^{k} C(n,i)C(n-i,k-i)$ وهذا هو الطرف الأيسر من المتطابقة.

(٢٧) أثبت أن $\sum_{k=1}^{n} C(n,k)C(n,n-k+1) = C(2n,n+1)$.

الحل

لاحظ أن الطرف الأيمن هو عدد طرق اختيار $n+1$ عنصراً من مجموعة مكونة من $2n$ عنصراً. ويمكن إنجاز ذلك بتقسيم $2n$ إلى مجموعتين عدد عناصر كل منها يساوي n. ومن ثم فإن $C(n,k)$ هو عدد طرق اختيار k عنصراً من n عنصراًوأن $C(n,n-k+1)$ هو عدد طرق اختيار باقي العناصر (عددها $n-k+1$) من n عنصراً. ولذا فعدد اختيار $n+1$ عنصراً من $2n$ من العناصر هو أيضاً $\sum_{k=1}^{n} C(n,k)C(n,n-k+1)$ وهو الطرف الأيسر من المتطابقة.

لاحظ أيضاً أنه يمكن الحصول على هذه المتطابقة من متطابقة ڤـــاندرموند بوضع

$m = n$ و $r = n+1$

(٢٨) جد قيمة $\sum_{k=1}^{20} C(20,k)C(20,k-1)$ [إرشاد: استخدم المسألة (٢٧)].

الحل

بما أن $C(20,k-1) = C(20,20-k+1)$ فنجد باستخدام المسألة (٢٧):

$$\sum_{k=1}^{20} C(20,k)C(20,k-1) = \sum_{k=1}^{20} C(20,k)C(20,20-k+1) = C(40,21).$$

(٢٩) جد قيمة $\sum_{k=0}^{20} C(50,k)C(50-k,20-k)$.

الحل

لاحظ أولاً أن

$C(n,m)C(m,k) = C(n,k)C(n-k,m-k)$ لكل أعداد صحيحة غير سالبة $k \le m \le n$ (أثبت ذلك). ولذا فإن

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{20} C(50,k)C(50-k,20-k) &= \sum_{k=0}^{20} C(50,20)C(20,k)\\ &= C(50,20)\sum_{k=0}^{20} C(20,k) = C(50,2)\times 2^{20}\end{aligned}$$

(٣٠) إذا كان $\frac{4}{5} = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{C(n,k)}{C(n,k)+C(n,k+1)}\right]^3$ فما قيمة n؟

الحل

لاحظ أولاً أن $C(n,k) + C(n,k+1) = C(n+1,k+1)$. ولذا فإن

$$\frac{C(n,k)}{C(n,k)+C(n,k+1)}=\frac{C(n,k)}{C(n+1,k+1)}=\frac{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}}{\dfrac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}}$$

$$=\frac{n!(k+1)!}{k!(n+1)!}=\frac{k+1}{n+1}$$

من ذلك نجد أن

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{C(n,k)}{C(n,k)+C(n,k+1)}\right]^3=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^3=\frac{1}{(n+1)^3}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^3$$

$$=\frac{1}{(n+1)^3}[1^3+2^3+\cdots+n^3]=\frac{1}{(n+1)^3}\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{n^2}{4(n+1)}$$

إذن,

$$\frac{n^2}{4(n+1)}=\frac{4}{5}$$

$$5n^2-16n-16=0$$

$$(5n+4)(n-4)=0$$

وبما أن n عدد صحيح فنجد أن $n=4$.

مسائل غير محلولة

(١) ما الحد الرابع في مفكوك $\left(x^2+\frac{5}{x}\right)^9$ ؟

(أ) $7500x^4$ (ب) $9500x^9$ (ج) $10500x^9$ (د) $12500x^3$

(٢) ما معامل x^3 في مفكوك $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^6$ ؟

(أ) -4320 (ب) -5200 (ج) 6320 (د) 7200

(٣) ما الحد الثابت في مفكوك $\left(3x-\frac{2}{x^2}\right)^{15}$ ؟

(أ) $-2^5\times 3^{10}C(16,5)$ (ب) $-2^6\times 3^9 C(16,6)$

(ج) $-2^7\times 3^8 C(16,7)$ (د) $-2^8\times 3^5 C(16,8)$

(٤) ما معامل الحد $\frac{1}{x}$ في مفكوك $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^{10}$ ؟

(أ) -780 (ب) -820 (ج) -920 (د) -960

(٥) ما معامل x^6 في مفكوك $(2-x)(3x+1)^9$ ؟

(أ) 81854 (ب) 91854 (ج) 92800 (د) 94850

(٦) إذا كان معامل x^3 في مفكوك $\left(2x+\frac{1}{rx^2}\right)^9$ يساوي 288 فما مجموع القيم الممكنة للعدد r ؟

(أ) -4 (ب) 0 (ج) 4 (د) 8

(٧) ما مجموع معاملات مفكوك $(x^3+2x^2+3x-7)^{100}$ ؟

(أ) -7 (ب) -2 (ج) -1 (د) 1

(٨) إذا كان $(1+rx)^n = 1 - 4x + \frac{15}{2}x^2 + \cdots$ فما قيمة $r+n$؟

(أ) 64 (ب) 63 (ج) $\frac{65}{4}$ (د) $\frac{63}{4}$

(٩) إذا كان الحد الثابت في مفكوك $\left(x^3 + \frac{r}{x^2}\right)^8$ يساوي الحد الثابت في مفكوك $\left(x^3 + \frac{r}{x^3}\right)^4$ فما مجموع القيم الممكنة للعد r؟

(أ) $\frac{12}{35}$ (ب) 0 (ج) $\frac{35}{12}$ (د) $\frac{6}{35}$

(١٠) إذا كان معامل الحد T_{2k+4} يساوي معامل الحد T_{k-2} في مفكوك $(1+x)^{18}$ فما قيمة k؟

(أ) 3 (ب) 6 (ج) 9 (د) 12

(١١) [AHSME 1950] ما عدد الحدود في مفكوك $[(a+3b)^2(a-3b)^2]^{15}$؟

(أ) 15 (ب) 30 (ج) 31 (د) 32

(١٢) ما قيمة $2C(n,2) + n^2$؟

(أ) $C(2n,2)$ (ب) $C(n+2,2)$ (ج) $C(4n,4)$ (د) $C(4n,2)$

(١٣) ما قيمة $\frac{1}{2}C(2n+2,n+1) - C(2n,n)$؟

(أ) $C(2n,n+2)$ (ب) $C(2n,n)$

(ج) $C(2n,n+1)$ (د) $C(n+1,n)$

(١٤) ما قيمة المجموع $\sum_{k=3}^{n} C(k,3)$؟

(أ) $C(n+2,5)$ (ب) $C(n+2,4)$

(ج) $C(n+1,4)$ (د) $C(n+1,5)$

(١٥) ما معامل x^8 في مفكوك $(x^3+x^2+1)^{12}$؟

(أ) 1100 (ب) 1135 (ج) 1155 (د) 1165

(١٦) ما قيمة المجموع $C(k,0)+C(k+1,1)+\cdots+C(n,n-k)$؟

(أ) $C(n+1,n-k)$ (ب) $C(n,n-k)$

(ج) $C(n+2,n-k)$ (د) $C(n+1,n-k-1)$

(١٧) ما قيمة المجموع $C(m,0)+C(m+1,1)+\cdots+C(m+j,j)$؟

(أ) $C(m+j+1,j)$ (ب) $C(m+j,j)$

(ج) $C(m+j,j+1)$ (د) $C(m+j+2,j)$

(١٨) ما قيمة المجموع $C(7,0)+5C(7,1)+5^2C(7,2)+\cdots+5^7C(7,7)$؟

(أ) 5^7 (ب) 6^7 (ج) 7^6 (د) 7^7

(١٩) ما قيمة المجموع $C(2n+1,0)+C(2n+1,1)+\cdots+C(2n+1,n)$؟

(أ) 4^n+2 (ب) 4^n+n (ج) 4^n+1 (د) 4^n

(٢٠) ما قيمة المجموع $[C(n,0)]^2+[C(n,1)]^2+\cdots+[C(n,n)]^2$؟

(أ) $[C(n,n-1)]^2$ (ب) $C(n^2,n)$ (ج) 1 (د) $C(2n,n)$

(٢١) ماقيمة المجموع $\sum_{k=0}^{20} C(41,k)$؟

(أ) 2^{20} (ب) 2^{21} (ج) 2^{40} (د) 2^{41}

(٢٢) قيمة المجموع $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$ تساوي

(أ) $3!C(n+3,3)$ (ب) $3!C(n+3,4)$

(ج) $6!C(n+3,3)$ (د) $3!C(n+1,4)$

(٢٣) ما قيمة المجموع

$C(25,8)C(15,0)+C(25,7)C(15,1)+\cdots+C(25,0)C(15,8)$ ؟

(أ) $C(40,8)$ (ب) $C(40,7)$ (ج) $C(41,8)$ (د) $C(41,7)$

(٢٤) ما قيمة المجموع $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C(n,i)C(n-i,k-i)$ ؟

(أ) 0 (ب) 2^n (ج) 2^{n-1} (د) 2^{n-2}

(٢٥) إذا كان $2 \le k \le n$ فإن المقدار

$C(n,k)+2C(n,k-1)+C(n,k-2)$ يساوي:

(أ) $C(n+1,k)$ (ب) $C(3n,k)$

(ج) $C(n+2,k)$ (د) $C(n+2,k-1)$

(٢٦) ما قيمة المجموع $[C(n,1)]^2+2[C(n,2)]^2+\cdots+n[C(n,n)]^2$ ؟

(أ) $nC(2n,n)$ (ب) $n^2C(2n,n)$

(ج) $\frac{n}{3}C(2n,n)$ (د) $\frac{n}{2}C(2n,n)$

(٢٧) لكل عدد صحيح موجب n , المقدار $C(3n,n)$ يقبل القسمة على:

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 5 (د) 7

(٢٨) [MAΘ 1991] معامل الحد الخالي من y في مفكوك $(xy-2y^{-3})^{16}$ يساوي

(أ) $8C(16,4)$ (ب) $16C(16,4)$ (ج) $8C(16,6)$ (د) $16C(16,6)$

(٢٩) [AIME 2000 I] إذا كان a و b أوليين نسبياً وكان معامل x^2 يساوي معامل x^3 في مفكوك $(ax+b)^{2000}$ فإن $a+b$ يساوي:

(أ) 667 (ب) 668 (ج) 669 (د) 670

(٣٠) [AIME 2001 I]إذا كانت جميع جذور المعادلة

$x^{2001} + \left(\frac{1}{2} - x\right)^{2001} = 0$ هي جذور بسيطة فما مجموعها ؟

(أ) 450 (ب) 480 (ج) 500 (د) 520

إجابات المسائل غير المحلولة

(١) ج	(٢) أ	(٣) أ	(٤) د	(٥) ب
(٦) ب	(٧) د	(٨) د	(٩) ب	(١٠) ب
(١١) ج	(١٢) أ	(١٣) ج	(١٤) ج	(١٥) ج
(١٦) أ	(١٧) أ	(١٨) ب	(١٩) د	(٢٠) د
(٢١) ج	(٢٢) ب	(٢٣) أ	(٢٤) أ	(٢٥) ج
(٢٦) د	(٢٧) ب	(٢٨) ب	(٢٩) أ	(٣٠) ج

الفصل الرابع

الاحتمالات
Probabilities

نقدم في هذا الفصل المبادئ الأساسية للاحتمالات دون الإسهاب في دراسة هذا الموضوع مما يتلاءم مع الغرض الذي وضع لأجله هذا الكتاب.

يمكن تعريف الاحتمال على أنها تقدير وقوعات مخرج بعد تكرار المحاولات في تجربة.

التجربة [experiment]

يمكن تعريف التجربة على أنها عملية مخرجاتها محددة تماماً. أما التجربة العشوائية فهي التجربة التي لا يمكن توقع مخرجاتها, مثل تجربة إلقاء قطعة نقود عادلة أو إلقاء حجر نرد عادل أو سحب ورقة من مجموعة من أوراق اللعب المخلوطة جيداً.

فضاء العينة [Sample Space]

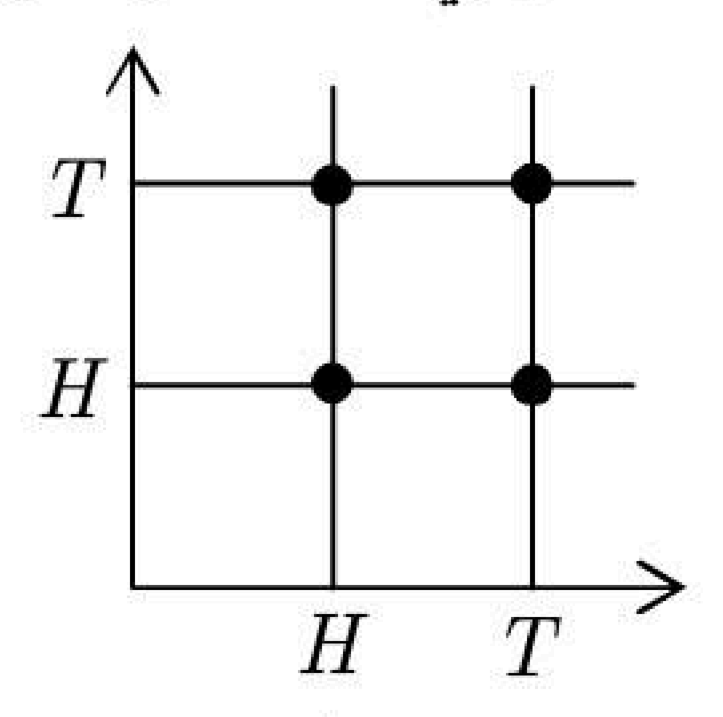
فضاء العينة هو مجموعة جميع مخرجات تجربة عشوائية.يوجد العديد من الطرق لتمثيل فضاء العينة ومن الطرق الشائعة:

- سرد جميع مخرجات التجربة وخاصة إذا كان عدد هذه المخرجات صغيراً

نسبياً. فمثلاً, عند رمي قطعة نقود مرة واحدة فإن فضاء العينة هو $S = \{H,T\}$ حيث H تعني ظهور صورة و T تعني ظهور كتابة.أما فضاء العينة لرمي قطعة نقود مرتين فهو $S = \{HH, HT, TH, TT\}$.
وفضاء العينة لإلقاء حجر نرد ذو ستة وجوه هو $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- استخدام نقاط الشبكة في المستوى.

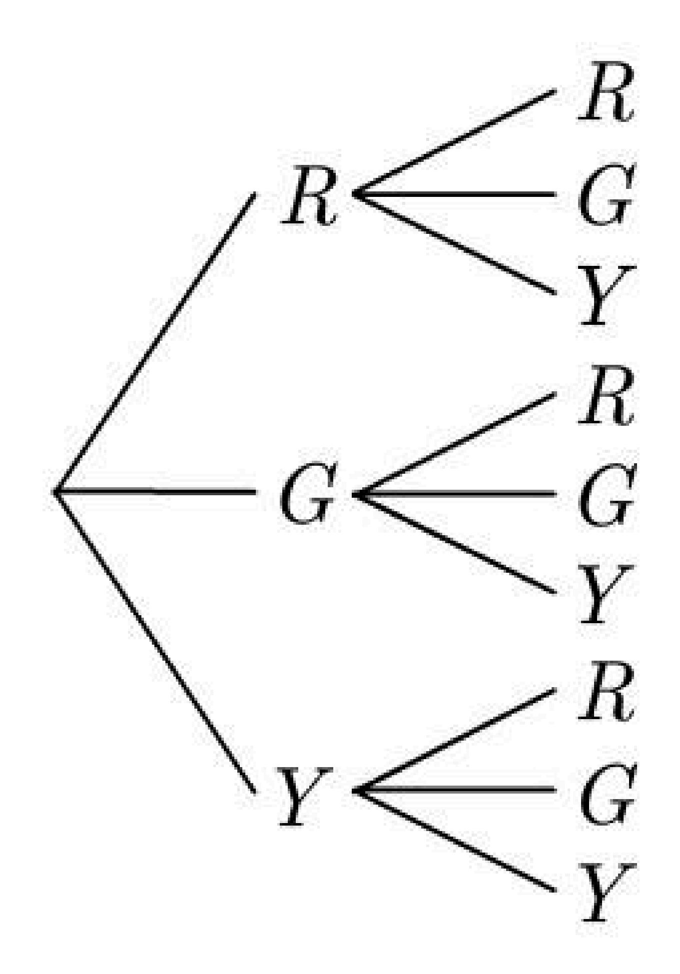
فمثلاً, يمكن تمثيل فضاء العينة لرمي قطعة نقود مرتين على النحو التالي:



حيث كل من نقاط التقاطع تمثل مخرجاً.

- استخدام الشجرة البيانية.

إحدى فوائد هذا التمثيل هي إمكانية استخدامه عندما يكون لمخرج التجربة خياران أو أكثر. فمثلاً, إذا سحبنا كرتين من وعاء يحتوي على عدد من الكرات الحمراء وعدد من الكرات الصفراء وعدد من الكرات الخضراء فمن الممكن الحصول على فضاء العينةعلى النحو التالي:



ويمكن قراءة عناصر فضاء العينة من الشجرة

$$S = \{RR, RG, RY, GR, GG, GY, YR, YG, YY\}$$

الحدث [Event]

تسمى أي مجموعة جزئية من فضاء العينةحدثاً. ويكون الحدث بسيطاً إذا احتوى على عنصر واحد من فضاء العينة. وإذا احتوى على أكثر من عنصر فإنه يسمى حدثاً مركباً. الحدث المستحيل هو المجموعة الخالية(أي أنه حدث مستحيل الوقوع). أما الحدث المؤكد وقوعه دائماً فهو فضاء العينة S .

نقول إن وقوع الحوادث متساوٍ على الأرجح إذا لم يكن هناك سبب لترجيح وقوع حدث عن وقوع حدث آخر. على سبيل المثال, عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة فإن وقوع الحوادث 1 , 2 , 3 , 4, 5, 6متساوٍ.

احتمال وقوع الحدث [Probability of an Event]

ليكن Sفضاء عينة وليكن $E \subseteq S$ حدثاً. يعرف احتمال وقوع الحدث E ويرمز

لذلك بالرمز $P(E)$ على أنه

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|}$$

حيث $|E|$ يرمز لعدد عناصر E و $|S|$ يرمز لعدد عناصر S.

مثال (١) عند إلقاء قطعة نقود مرتين فإن فضاء العينة هو

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

إذا كان E هو حدث الحصول على صورة واحدة فإن $E = \{HT, TH\}$ وإن $P(E) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. ◇

مثال (٢) عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة فإن فضاء العينة هو $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. إذا كان E هو حدث ظهور عدد أكبر من 4 فإن $E = \{5,6\}$ ويكون $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. ◇

مثال (٣) إذا أردنا تجليس ثلاثة أشخاص A , B , C على ثلاثة كراسي في صف واحد فإن فضاء العينة هو عدد الطرق الممكنة لذلك. أي عدد تبديلات ثلاثة عناصر وهذا العدد كما نعلم يساوي $3! = 6$. من السهل هنا تعيين فضاء العينة وهو $S = \{ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA\}$.

إذا كان E هو حدث جلوس A على يسار الصف فإن $E = \{ABC, ACB\}$ ويكون $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. وأما حدث جلوس A و C بجانب بعضهما البعض فهو $D = \{ACB, BAC, BCA, CAB\}$ ويكون $P(D) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. ◇

الحوادث المنفصلة [Mutually Exclusive Events]

نقول إن الحدثين A و B منفصلان إذا لم يقعا معاً. أي إذا وقع A فإن B لم يقع وبالعكس, إذا وقع B فإن A لم يقع. وبهذا فإن $A \cap B = \varnothing$. وبصورة عامة نقول إن الحوادث $A_1, A_2, \cdots, A_n$ منفصلة مثنى مثنى إذا وفقط إذا كان $A_i \cap A_j = \varnothing$ لكل $i \neq j$.

مثال (٤) عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة فإن فضاء العينة هو $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. إذا كان A هو حدث الحصول على عدد زوجي وأن B هو حدث الحصول على عدد فردي فإن $A = \{2,4,6\}$ و $B = \{1,3,5\}$. وبما أن $A \cap B = \varnothing$ (أي أن العدد لا يمكن أن يكون فردياً وزوجياً معاً) فإن A و B حدثان منفصلان. وإذا كان E هو حدث الحصول على عدد أصغر من 4 فإن $E = \{1,2,3\}$. وبهذا فإن الحدثين A و E غير منفصلين لأن $A \cap E = \{2\} \neq \varnothing$. ◇

الحوادث المستقلة [Independent Events]

نقول إن الحدثين A و B مستقلان إذا كان وقوع أحدهما أو عدم وقوعه لا يؤثرعلى احتمال وقوع أو عدم وقوع الآخر. وبصورة عامة نقول إن الحوادث $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مستقلة إذا كان وقوع أحدها أو عدم وقوعه لا يؤثر على وقوع أو عدم وقوع الحوادث الأخرى.

مثال (٥) يحتوي كيس على 5 كرات بيضاء و 7 كرات سوداء. سحبنا كرتين واحدة بعد الأخرى مع الإرجاع. إذا كان A حدث أن الكرة المسحوبة أولاً هي

كرة بيضاء وأن B هو حدث سحب كرة سوداء في السحبة الثانية. عندئذ, احتمال حدوث B لا يتأثر بحدوث A سابقاً وذلك لأننا أرجعنا A إلى الكيس قبل سحب الكرة B . أي أن $P(A) = \dfrac{5}{12}$ وأن $P(B) = \dfrac{7}{12}$. ◇

المسلمات الأساسية للاحتمال[Basic Axioms of Probability]

ليكن S فضاء العينة لتجربة عشوائية. عندئذ,

(١) $P(A) \geq 0$ لكل حدث A .

(٢) $P(S) = 1$.

(٣) إذا كانت $A_1, A_2, \cdots, A_n$ حوادث منفصلة مثنى مثنى فإن

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

خصائص الاحتمال الأساسية [Basic Properties of Probability]

(١) $P(\varnothing) = 0$.

البرهان

بما أن $A \cap \varnothing = \varnothing$ لأي حدث A فإن

$$P(A) = P(A \cup \varnothing) = P(A) + P(\varnothing)$$

وبهذا فإن $P(\varnothing) = 0$.

(٢) $0 \leq P(A) \leq 1$ لكل حدث A .

البرهان

بما أن $P(A) \geq 0$ فيبقى إثبات أن $P(A) \leq 1$. الآن، $A \cap A' = \varnothing$. ولذا فإن

$A \cup A' = S$. إذن،

$$1 = P(S) = P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

وبما أن $P(A') \geq 0$ فإن $P(A) \leq 1$.

(٣) إذا كان A' هو الحدث المتمم للحدث A (أي أن $A' = S - A$) فإن

$$P(A') = 1 - P(A)$$

البرهان

بما أن $A' = S - A$ فإن $S = A \cup A'$ وإن $A \cap A' = \varnothing$. إذن,

$$P(S) = P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

من ذلك يكون $P(A') = P(S) - P(A) = 1 - P(A)$.

(٤) إذا كان $A \subseteq B$ فإن $P(A) \leq P(B)$.

البرهان

بما أن $B = A \cup (B - A)$ وأن $A \cap (B - A) = \varnothing$ فإن

$P(B) = P(A) + P(B - A)$. وبما أن $P(B - A) \geq 0$ فإننا نخلص إلى أن $P(A) \leq P(B)$.

(٥) تبين لنا هذه الخاصية كيفية إيجاد احتمال وقوع الحدث $A \cup B$ بصورة عامة. إذا كان A و B حدثين فإن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) .$$

البرهان

بملاحظة أن

$$A \cup B = (A \cap B') \cup (B \cap A') \cup (A \cap B)$$
$$A = (A \cap B') \cup (A \cap B)$$
$$B = (B \cap A') \cup (A \cap B)$$

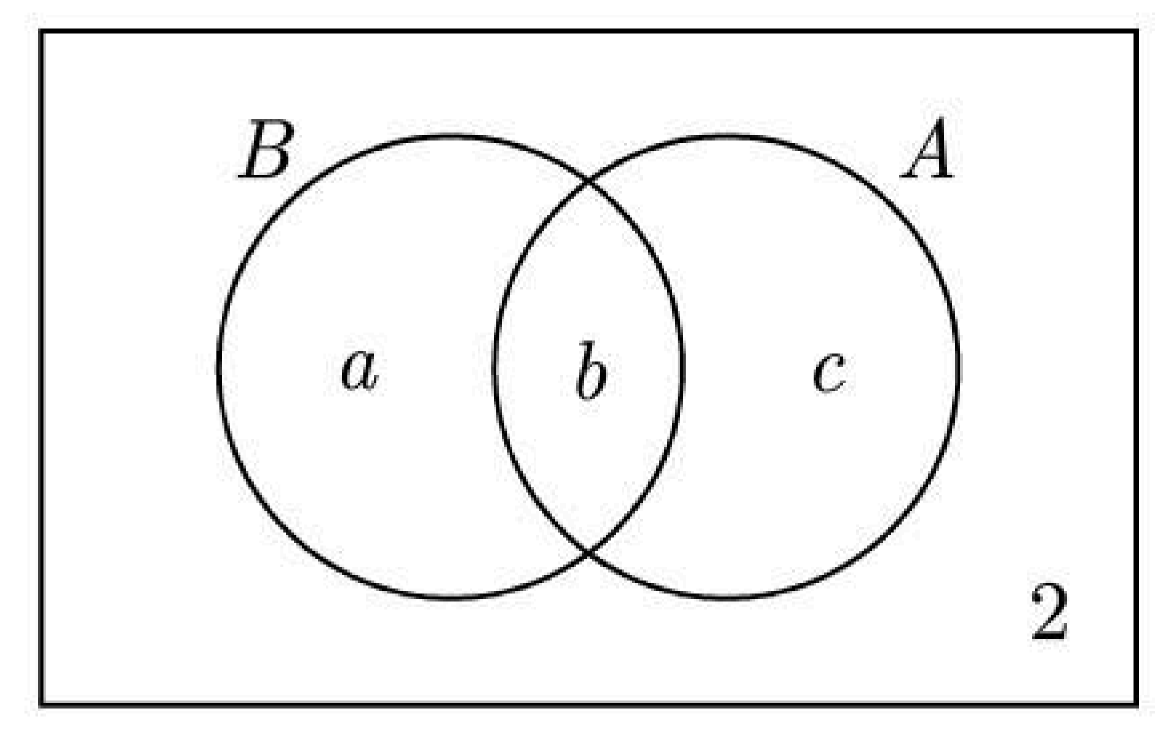
وأن الحوادث $A \cap B$, $A \cap B'$, $B \cap A'$ منفصلة نجد أن

$$P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B)$$
$$P(B) = P(B \cap A') + P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A \cap B') + P(B \cap A') + P(A \cap B)$$
$$= [P(A \cap B') + P(A \cap B)] + [P(B \cap A') + P(A \cap B)] - P(A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال (٦) عند استطلاع رأي 40 طالباً وجد أن 34 منهم يفضلون الموز و 22 يفضلون الأناناس وأن طالبين لا يفضلون الموز ولا الأناناس. اخترنا طالباً عشوائياً. ما احتمال أن يكون هذا الطالب يفضل إحدى الفاكهتين على الأقل ؟

الحل

إن أفضل طريقة لحل هذه المسألة هو استخدام أشكال فـــن. لنفرض أن B هو حدث تفضيل الطالب للموز وأن A هو حدث تفضيل الطالب للأناناس. عندئذ, نجد من الرسم المرفق أن



$a + b = 34$, $b + c = 22$, $a + b + c = 38$. من ذلك, نرى أن

$$c = 38 - (a + b) = 38 - 34 = 4$$
$$b = 22 - c = 22 - 4 = 18$$
$$a = 34 - b = 34 - 18 = 16$$

المطلوب هو $P(A \cup B)$. ولحساب ذلك نستخدم

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{34}{40} + \frac{22}{40} - \frac{18}{40} = \frac{38}{40} = \frac{19}{20} \end{aligned}$$ ◇

الاحتمال المشروط [Conditional Probability]

لنفرض أننا ألقينا قطعة نقود عادلة ثلاث مرات. عندئذ, فضاء العينة هو

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, TTH, THT, TTT\}$$

ولنفرض أن A هو حدث وقوع كتابة في الرمية الأولى. أي أن

$.A = \{THH, TTH, THT, TTT\}$

ولنفرض أن B هو حدث وقوع عدد فردي من الكتابات في الرميات الثلاث. أي

$.B = \{HHT, HTH, THH, TTT\}$

ولنفرض أن C هوحدث وقوع B إذا علمنا أن A قد وقع. أي أن $C = \{THH, TTT\}$. وبهذا فإن $P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

هذا النوع من الاحتمال يسمى الاحتمال المشروط لوقوع B إذا كان A قد وقع ويرمز له بالرمز $P(B \mid A)$ ويعرف على النحو التالي:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$ حيث $P(A) > 0$.

مثال (٧) ألقينا حجري نرد. إذا كان مجموع العددين الظاهرين يساوي 7 فما احتمال أن يظهر العدد 3 على أحد الحجرين ؟

الحل

لنفرض أن B هو حدث أن مجموع العددين يساوي 7. ولنفرض أن A هو حدث

ظهور العدد 3 على أحد الحجرين على الأقل. عندئذ, المطلوب هو إيجاد $P(A \mid B)$. الآن, $B = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$.

ومن ثم فإن $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. أيضاً

$$A = \{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6)\}$$

$$A \cap B = \{(3,4),(4,3)\}$$

وبهذا نجد أن $P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. ويكون

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{18} \times \frac{6}{1} = \frac{1}{3} \qquad \diamond$$

لنفرض الآن أن الحدثين A , B مستقلان. عندئذ, وقوع أو عدم وقوع B لا يؤثر على احتمال وقوع A . أي أن $P(A \mid B) = P(A)$. وبهذا نحصل على:

يكون الحدثان A و B مستقلين إذا وفقط إذا كان

$P(A) = P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. أي أن $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

وبصورة عامة, إذا كانت $A_1, A_2, \cdots, A_n$ حوادث مستقلة فإن

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

ملحوظة

أحياناً نكتب AB عوضاً عن $A \cap B$ ليدل على وقوع الحدثين A و B معاً.

من الممكن تعميم قانون الاحتمال المشروطإلى أي عدد من الحوادث.

مبرهنة الضرب للاحتمال المشروط

[Multiplication Theorem For Conditional Probability]

إذا كانت $A_1, A_2, \cdots, A_n$ حوادث فإن

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\cdots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

البرهان

الطرف الأيمن من المساواة هو

$$P(A_1) \times \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} \times \frac{P(A_3 \cap A_1 \cap A_2)}{P(A_1 \cap A_2)} \times \cdots \times \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})} = P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

مثال (٨) ألقينا قطعة نقود وحجر نرد معاً. ما احتمال الحصول على كتابة وعدد أكبر من 4 ؟

الحل

هذه مسألة على حدثين مستقلين. لنفرض أن A هو حدث الحصول على كتابة وأن B هو حدث الحصول على عدد أكبر من 4 . عندئذ,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6} .$$ ◇

مثال (٩) اخترنا ثلاثة أعداد عشوائياً من المجموعة $\{1,2,3,\cdots,30\}$ واحداً بعد الآخر دون إرجاع. ما احتمال أن تكون الثلاثة أعداد هي أعداد أولية ؟

الحل

الأعداد الأولية هي $2,3,5,7,11,13,17,19,23,29$ وعددها 10 . لنفرض أن A , B , C هي حوادث أن يكون العدد الأول, العدد الثاني, العدد الثالث, أولياً على التوالي.

عندئذ, المطلوب هو إيجاد $P(A \cap B \cap C)$. ولكن

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid A \cap B)$$
$$= \frac{10}{30} \times \frac{9}{29} \times \frac{8}{28} = \frac{6}{603} \quad \diamond.$$

التجزئة ومبرهنة بيز [Partitions And Bayes Theorem]

لتكن الحوادث $A_1, A_2, \cdots, A_n$ تجزيئاًلفضاء العينة S. أي أن $A_i \cap A_j = \varnothing$ لكل $j \neq i$ وأن $S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. وليكن B أي حدث. عندئذ,

$$B = S \cap B = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap B$$
$$= (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$$

وبما أن الحوادث $A_i \cap B$ منفصلة فإننا نجد:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

ولكن $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B \mid A_i)$ لكل i. إذن,

$$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n)$$

ولكننا نعلم من الاحتمال المشروط أن $P(A_i \mid B) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$. إذن,

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n)}$$

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n)}$$

وهذه النتيجة تعرف بمبرهنة بيز.

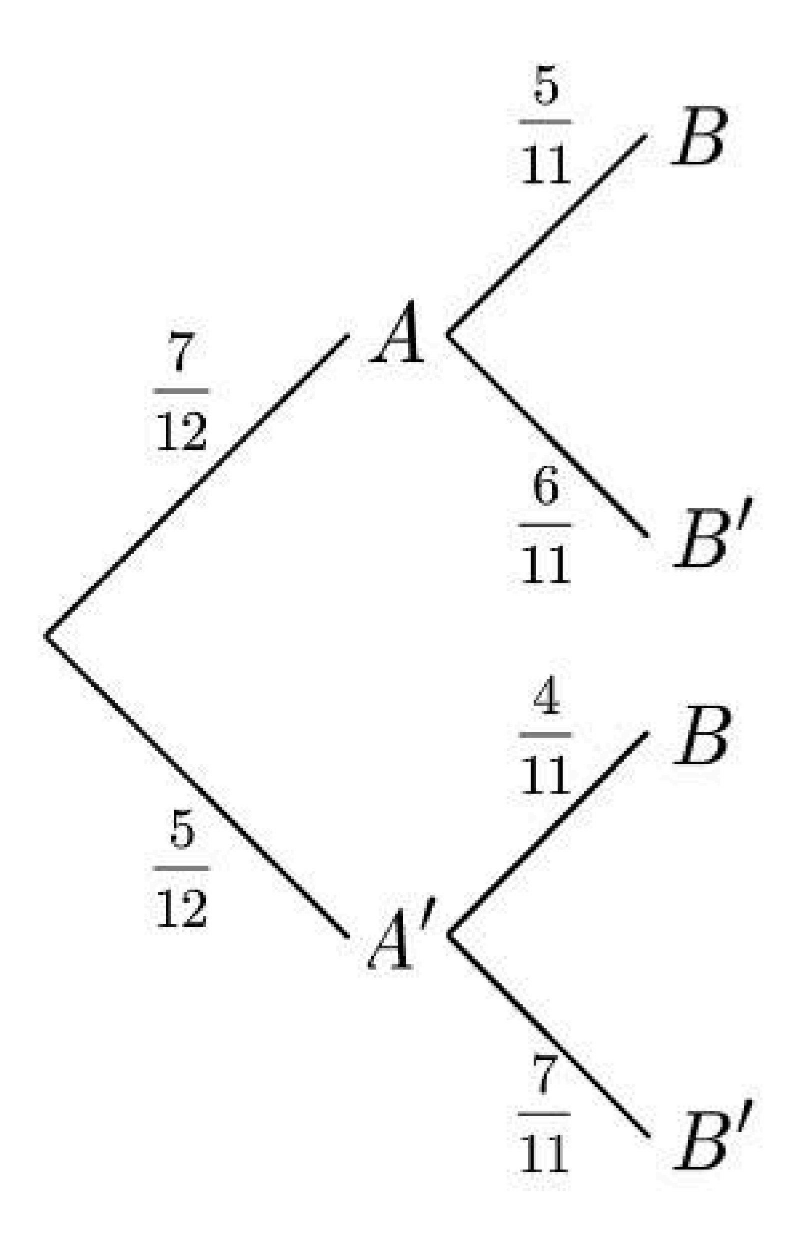
مثال (١٠) وعاء يحتوي على 5 كرات زرقاء و 7 كرات خضراء. سحبنا عشوائياً كرة من الوعاء دون إرجاع وسجلنا لونها. ثم سحبنا بعد ذلك كرة أخرى.

(أ) احسب احتمال أن تكون الكرة الثانية زرقاء

(ب) احسب احتمال أن تكون الكرة الأولى خضراء إذا علمت أن الكرة الثانية زرقاء.

الحل

لنفرض أن A حدث أن الكرة الأولى خضراء وأن B حدث أن الكرة الثانية زرقاء. بالاستعانة بالشجرة البيانية نرى أن



(أ)
$$P(B) = P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A')P(A')$$
$$= \frac{7}{12} \times \frac{5}{11} + \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} = \frac{55}{132}$$

(ب)
$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{7}{12} \times \frac{5}{11}}{\frac{55}{132}} = \frac{35}{55} = \frac{7}{11}.$$ ◇

مثال (١١) في روضة للأطفال وجدنا أن خمس الأولاد وثلث البنات لا يشربون الحليب في الصباح. كما أن عدد البنات في الروضة يساوي $\frac{2}{5}$عدد أطفال الروضة. اخترنا طفلاً عشوائياً ووجدنا أنه لا يشرب الحليب في الصباح. ما احتمال أن يكون هذا الطفل بنتاً ؟

الحل

لنفرض أن A حدث أن الطفل لا يشرب الحليب في الصباح وأن G حدث أن يكون الطفل بنتاً وأن B حدث أن يكون الطفل ولداً. إذن, المطلوب هو إيجاد $P(G \mid A)$. باستخدام مبرهنة بيز لدينا

$$P(G \mid A) = \frac{P(G)P(A \mid G)}{P(G)P(A \mid G) + P(B)P(A \mid B)}$$

$$= \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{5}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{16}{75}} = \frac{5}{8}$$ ◇

مثال (١٢) ذهب أحمد وبدر إلى البر لغرض الصيد. وأثناء محاولتهم ذلك لمحا ضباً. إذا كان احتمال أن يرمي أحمد ويصيب الضب 25%واحتمال أن يرمي بدر ويصيب الضب 35% . فما احتمال أن يصيب الضب أحدهما على الأقل ؟

الحل

لنفرض أن A حدث أن يصيب أحمد الضب وأن B حدث أن يصيب بدر الضب. المطلوب هو إيجاد $P(A \cup B)$.وبما أن A و B مستقلان فإن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$
$$= \frac{25}{100} + \frac{35}{100} - \frac{25}{100} \times \frac{35}{100} = 0.5125$$ ◇

مثال (١٣) يحتوي الصندوق A على 20 كرة، خمسة منها حمراء ويحتوي الصندوق B على 15 كرة 6 منها حمراء. سحبنا كرة من كل من الصندوقين عشوائياً. إذا كانت إحداهما حمراء والأخرى ليست حمراء فما احتمال أن تكون الكرة الحمراء قد سحبت من الصندوق A ؟

الحل

لنفرض أن R حدث أن الكرة الحمراء قد سحبت من الصندوق A ولنفرض أن S هو حدث أن تكون إحداهما حمراء والأخرى ليست حمراء.المطلوب هو إيجاد $P(R \mid S) = \dfrac{P(R \cap S)}{P(S)}$.

لحساب $P(S)$ لاحظ أنه إما أن تكون الكرة الحمراء من A والكرة غير الحمراء من B أو أن تكون الكرة الحمراء من B والكرة غير الحمراء من A. ولهذا فإن

$$P(S) = \frac{5}{20} \times \frac{9}{15} + \frac{15}{20} \times \frac{6}{15} = \frac{125}{300}.$$

أما $R \cap S$ فهو حدث الحصول على كرة حمراء من الصندوق A وكرة غير حمراء من الصندوق B. إذن, $P(R \cap S) = \dfrac{5}{20} \times \dfrac{9}{15} = \dfrac{45}{300}$.

وبهذا يكون $P(R \mid S) = \dfrac{\frac{45}{300}}{\frac{135}{300}} = \dfrac{45}{135} = \dfrac{1}{3}$. ◇

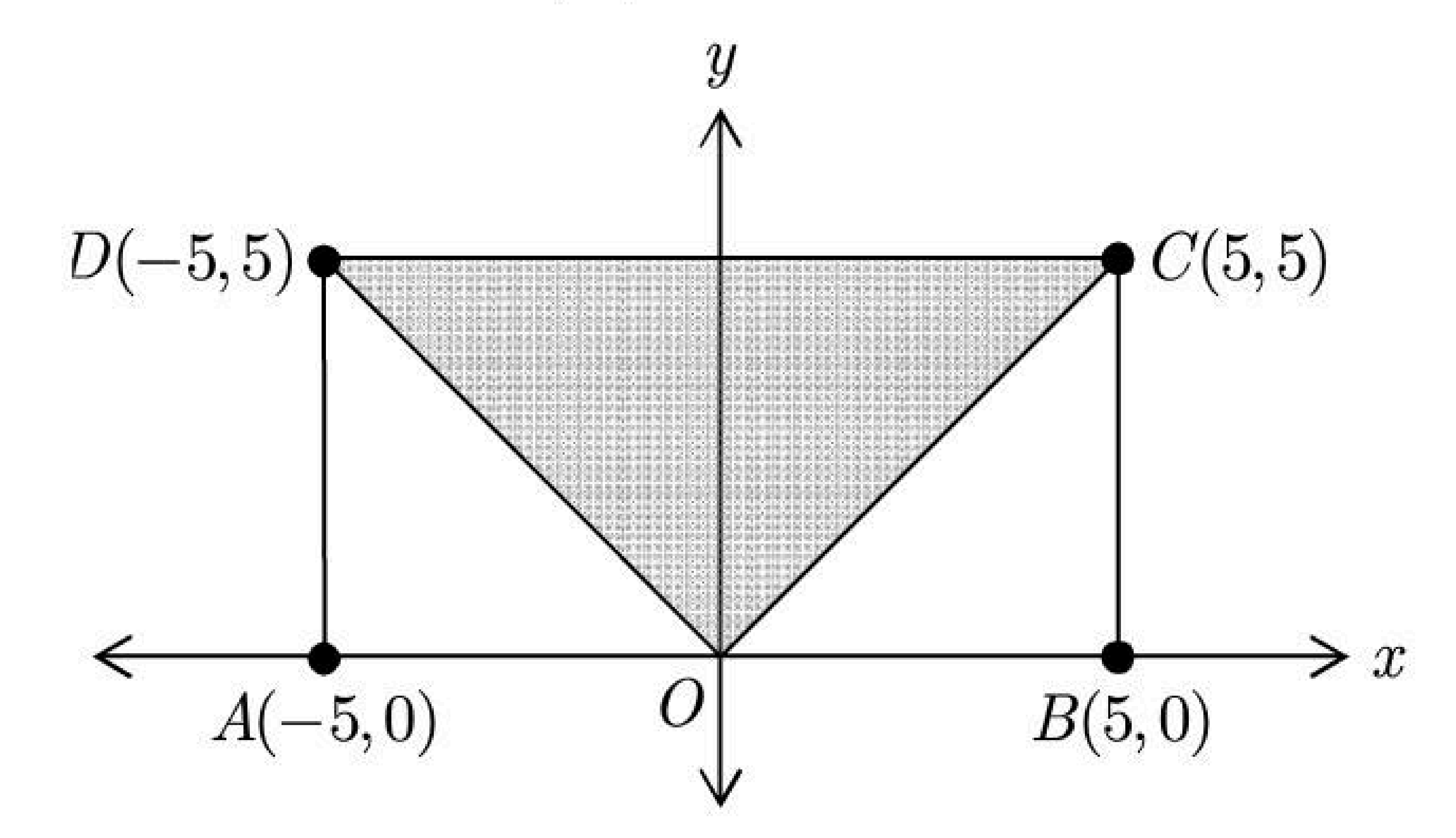
احتمالات هندسية [Geometric Probabilities]

في العديد من مسائل الاحتمالات نحتاج لمفهوم الاحتمال الهندسي الذي يصف فرصة وقوع نقطة على قطعة مستقيمة أو داخل منطقة. فلذا يمكن حساب احتمال الحدث في هذه الحالات باستخدام الأطوال أو المساحات أو الحجوم وسنوضح ذلك ببعض الأمثلة.

مثال (١٤) لنفرض أن $ABCD$ مستطيل في المستوى. إحداثيات رؤوسه هي $A=(-5,0)$, $B=(5,0)$, $C=(5,5)$, $D=(-5,5)$. اخترنا نقطة داخل المستطيل عشوائياً. ما احتمال أن تحقق النقطة المتباينة $|x| \geq y$؟

الحل

الشكل المرفق يبين المستطيل حيث ظللنا النقطة داخل المستطيل التي تحقق $|x| \geq y$. بفرض أن S هو فضاء العينة (جميع النقاط داخل المستطيل) وأن E هو حدث أن النقطة داخل المستطيل تحقق المتباينة $|x| \geq y$. يكون

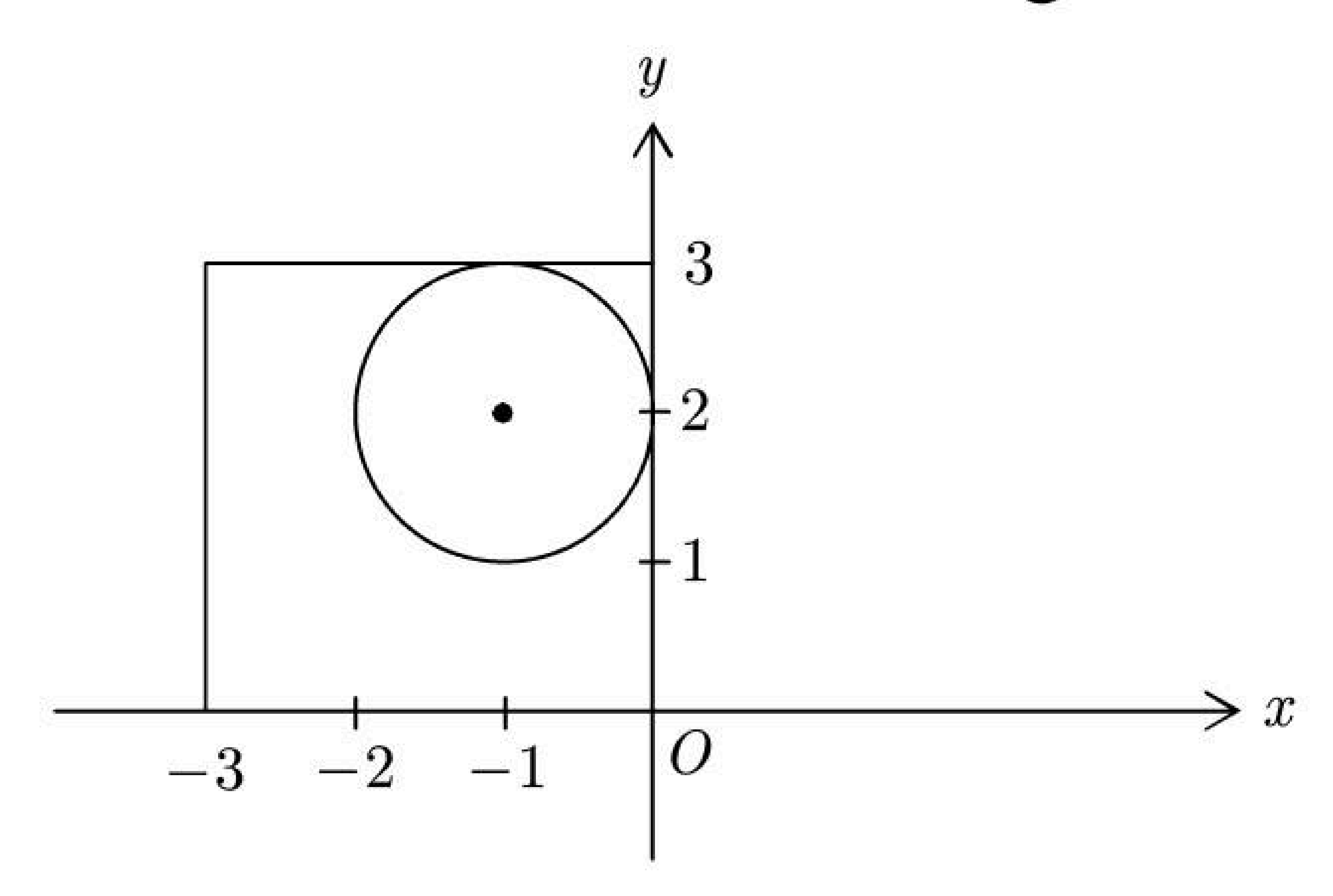


$$P(E)=\frac{|E|}{|S|}=\frac{\text{مساحة المثلث } OCD}{\text{مساحة المستطيل } ABCD}=\frac{\frac{1}{2}\times 5\times 10}{5\times 10}=\frac{1}{2}.\ \diamondsuit$$

مثال (١٥) اخترنا نقطة (x,y)عشوائياً في المستوى حيث $-3 \leq x \leq 0$ و $0 \leq y \leq 3$. ما احتمال أن تقع النقطة داخل الدائرة $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ ؟

الحل

لتكن S هي مجموعة نقاط فضاء العينة وهي نقاط المربع المبين في الشكل المرفق، وليكن A هو حدث وقوع النقطة داخل الدائرة.إذن,



$$P(A) = \frac{\text{مساحة الدائرة}}{\text{مساحة المربع}} = \frac{\pi \times 1^2}{9} = \frac{\pi}{9}.$$ ◇

الاحتمال وطرق العد [Probability And Counting]

لحل العديد من مسائل الاحتمالات نحتاج إلى استخدام طرق العد التي درسناها في الفصلين الأول والثاني. نقدم بعض الأمثلة لتوضيح ذلك.

مثال (١٦) نريد اختيار فريق عشوائياً مكون من ثلاثة أطباء وأربعة ممرضين من بين 10أطباء و 12ممرضاً. ما احتمال أن يكون الطبيب أحمد والممرض بدر من

ضمن الفريق المختار ؟

الحل

عدد طرق اختيار الفريق (عدد عناصر فضاء العينة S) يساوي

$$\left|S\right| = C(10,3) \times C(12,4) = 59400 .$$

وليكن A هو حدث اختيار الطبيب أحمد والممرض بدر ضمن الفريق. عندئذ, إذا كان الطبيب أحمد ضمن الفريق فيمكن اختيار الطبيبين الآخرين بعدد من الطرق يساوي $C(9,2) = 36$ وإذا كان بدر ضمن الفريق فيمكن اختيار الثلاثة ممرضين الآخرين بعدد من الطرق يساوي $C(11,3) = 165$. إذن,

$\left|A\right| = 36 \times 165 = 5940$. وبهذا فإن $P(A) = \dfrac{\left|A\right|}{\left|S\right|} = \dfrac{5940}{59400} = \dfrac{1}{10}$. ◇

مثال (١٧) عدد الطلاب المسجلين في مقرر التفاضل والتكامل لفصل دراسي يساوي 220 طالباً.اجتاز 80 طالباً المقرر بنجاح. اخترنا ثلاثة طلاب عشوائياً. ما احتمال أن يكون الثلاثة طلاب قد اجتازوا المقرر بنجاح ؟

الحل

ليكن S هو فضاء العينة و A هو حدث اجتياز الثلاثة طلاب لمقرر التفاضل والتكامل. إذن,

$$P(A) = \frac{\left|A\right|}{\left|S\right|} = \frac{C(80,3)}{C(220,3)} . \qquad \diamond$$

مثال (١٨) تتكون لوحات السيارات في المملكة العربية السعودية من ثلاثة حروف مأخوذة من الهجائية الإنجليزية (عدد حروفها 26) متبوعة بأربعة أرقام مأخوذة من المجموعة $\{0,1,2,\cdots,9\}$. اخترنا لوحة سيارة عشوائياً. ما احتمال أن

لا تحتوي هذه اللوحة, الحرف Oولا الرقم 0؟

الحل

عدد اللوحات الممكنة (عدد عناصر فضاء العينة) يساوي $26^3 \times 10^4$.

عدد الأعداد المكونة من أربعة أرقام ولا تحتوي الرقم 0هو $10^4 - 9^4$.

عدد الكلمات المكونة من ثلاثة حروف ولا تحتوي على الحرف Oهو $26^3 - 25^3$.

إذن, عدد اللوحات التي يمكن تكوينها ولا تحتوي على الحرف Oولا الرقم 0هو $(10^4 - 9^4) \times (26^3 - 25^3)$.

وبهذا فاحتمال عدم احتواء اللوحة على الحرف Oوالرقم 0هو

$$\frac{(10^4 - 9^4)(26^3 - 25^3)}{26^3 \times 10^4}. \qquad \diamond$$

مثال (١٩) فصل حضانة أطفال يحتوي 5 تلميذات و 10 تلاميذ. اخترنا مجموعة من الأطفال عددهم 7. ما احتمال أن تحتوي المجموعة على جميع التلميذات ؟

الحل

عدد طرق اختيار 7أطفال من بين 15طفلاً هو $C(15,7) = \frac{15!}{7! \times 8!} = 6435$.

عدد طرق اختيار 5تلميذات من 5تلميذات هو $C(5,5) = 1$وعدد طرق اختيار تلميذين من 10تلاميذ هو $C(10,2) = 45$. إذن, احتمال اختيار الفريق هو

$$\frac{1 \times 45}{6435} = \frac{1}{143} \approx 0.07. \qquad \diamond$$

مثال (٢٠) ما احتمال أن تحتوي المجموعة المختارة في المثال (١٩) على ثلاث تلميذات على الأقل ؟

الحل

عدد طرق اختيار ثلاث تلميذات على الأقل هو

$$C(5,3)C(10,4) + C(5,4)C(10,3) + C(5,5)C(10,2)$$
$$= 10 \times 210 + 4 \times 120 + 1 \times 45 = 2745$$

إذن, الاحتمال المطلوب هو $0.27 \approx \frac{349}{1287} = \frac{2745}{6435}$. ◇

مثال (٢١) وضعنا الثمانية حروف A, D, G, I, K, N, S, U عشوائياً في صف واحد. ما احتمال الحصول على كلمة $KINGSAUD$ ؟

الحل

عدد تبديلات 8 حروف هو $8!$. واحدة فقط من هذه التبديلات هي $KINGSAUD$. إذن, الاحتمال هو $0.000025 \approx \frac{1}{40320} = \frac{1}{8!}$. ◇

احتمالات ذات الحدين [Binomial Probabilities]

لنفرض أن فريق نادي الهلال السعودي سيلعب 4 مباريات ودية ولنفرض أن احتمال فوز الفريق في كل من هذه المباريات هو $\frac{3}{5}$. ما احتمال أن يفوز الفريق ببعض هذه المباريات ويخسر في البعض الآخر ؟

للإجابة عن هذا السؤال ندرس جميع الحالات الممكنة. دعنا نستخدم الرمز $P(X = k)$ ليعني فوز فريق نادي الهلال بعدد k من المباريات الأربع حيث $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

الحالة الأولى: $P(X = 0)$. في هذه الحالة يخسر الفريق جميع المباريات واحتمال ذلك

$$P(X=0)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\left(\frac{3}{5}\right)^0\times\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{625}$$

الحالة الثانية: $P(X=1)$. لاحظ هنا إمكانية الفوز في المباراة الأولى أو الثانية أو الثالثة أو الرابعة.ولذا فالاحتمال هنا هو

$$P(X=1)=P(WLLL)+P(LWLL)+P(LLWL)+P(LLLW)$$

حيث W يرمز للفوز في المباراة و L يرمز لخسارة المباراة. ولذا فإن

$$P(X=1)$$
$$=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}$$
$$=4\times\left(\frac{3}{5}\right)^1\times\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{96}{625}$$

لاحظ أنهيمكن حساب هذا الاحتمال على النحو التالي: عدد طرق اختيار مباراة رابحة من بين أربع مباريات هو $C(4,1)=4$. واحتمال الفوز في مباراة واحدة هو $\left(\frac{3}{5}\right)^1\times\left(\frac{2}{5}\right)^3$.إذن, $P(X=1)=C(4,1)\times\left(\frac{3}{5}\right)^3\times\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{96}{625}$.

الحالة الثالثة: $P(X=2)$. احتمال الفوز بمبارتين من أربع مباريات هو $\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2$.وعدد طرق اختيار مبارتين من أربع مباريات هو $C(4,2)=6$.

إذن,

$$P(X=2)=C(4,2)\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{216}{625}.$$

الحالة الرابعة: $P(X=3)$. احتمال الفوز في ثلاث مباريات من أربع مباريات هو $\left(\frac{2}{5}\right)^1 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3$. عدد طرق اختيار ثلاث مباريات من أربع مباريات هو $C(4,3)=4$. إذن,

$$P(X=3)=C(4,3)\times\left(\frac{3}{5}\right)^3\times\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{216}{625}.$$

الحالة الخامسة: $P(X=4)$. احتمال الفوز في الأربع مباريات هو $\left(\frac{2}{5}\right)^0 \times \left(\frac{3}{5}\right)^4$. عدد طرق اختيار أربع مباريات من أربع مباريات هو $C(4,4)=1$. إذن,

$$P(X=4)=C(4,4)\times\left(\frac{3}{5}\right)^4\times\left(\frac{2}{5}\right)^0=\frac{81}{625}.$$

لاحظ أن

$$\begin{aligned}&P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)\\&=\frac{16+96+216+216+81}{625}=1\end{aligned}$$

إن ما قدمناه في هذا المثال هو حالة خاصة لإيجاد احتمال kمن النجاحات من n من المحاولات المستقلة حيث تسمى هذه المحاولات بتجربة ذات الحدين أو تجربة بيرنولي. في هذه التجربة المحاولات n جميعها مستقلة ونتيجة كل من هذه المحاولات هي النجاح أو الفشل (الفوز أو الخسارة في مثالنا المقدم أعلاه). فمثلاً, إذا ألقينا قطعة نقود فيمكن اعتبار ظهور صورة هو النجاح وظهور كتابة هو الفشل, وإذا ألقينا حجري نرد وسجلنا المجموع فيمكن اعتبار أن يكون المجموع يساوي 10هو النجاح و الفشل هو أن يكون المجموع لا يساوي 10. وبصورة عامة, إذا كان

احتمال النجاح في تجربة بيرنولي هو p فيكون احتمال الفشل هو $1-p$ ومن ثم احتمال الحصول على عدد k من النجاحات من عدد n من المحاولات المستقلة هو

$$. P(X = k) = C(n,k) \times p^k (1-p)^{n-k}$$

ويسمى هذا الاحتمال عادة باحتمال ذات الحدين.

مثال (٢٢) من خبرة سابقة, وجد بائع سيارات أنه يبيع سيارة لمتسوق واحد من بين كل خمسة متسوقين. زار المعرض 15 متسوقاً يوم السبت. ما احتمال أن يشتري 4 منهم سيارات ؟

الحل

هذا مثال على تجربة بيرنولي حيث احتمال النجاح هو $\frac{1}{5}$ واحتمال الفشل هو $\frac{4}{5}$ و $n = 15$, الاحتمال المطلوب هو $P(X = 4)$.

$$. P(X = 4) = C(15,4) \times \left(\frac{1}{5}\right)^4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{11} \approx 0.002 \qquad \diamond$$

مثال (٢٣) ألقينا قطعة نقود 8 مرات (أو ألقينا 8 قطع نقود مرة واحدة). ما احتمال الحصول على ثلاث صور ؟

الحل

لنفرض أن النجاح هو الحصول على صورة. وبهذا نجد أن $p = 1 - p = \frac{1}{2}$. المطلوب هو إيجاد $P(X = 3)$. إذن،

$$. P(X = 3) = C(8,3)\left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 56 \times \frac{1}{256} = \frac{7}{32} \qquad \diamond$$

مثال (٢٤) حجر نرد يحتوي على وجهين لونهما أحمر وأربع وجوه لونها أخضر. رمينا حجر النرد 7 مرات. ما احتمال الحصول على وجه أحمر في ثلاث رميات ؟

الحل

لاحظ أن احتمال النجاح هنا هو $p = P(R) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ واحتمال الفشل هو $P(G) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. المطلوب هنا هو إيجاد $P(X = 3)$. إذن,

$$P(X = 3) = C(7,3)\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^4 = 35 \times \frac{16}{2187} = \frac{560}{2187}.$$ ◇

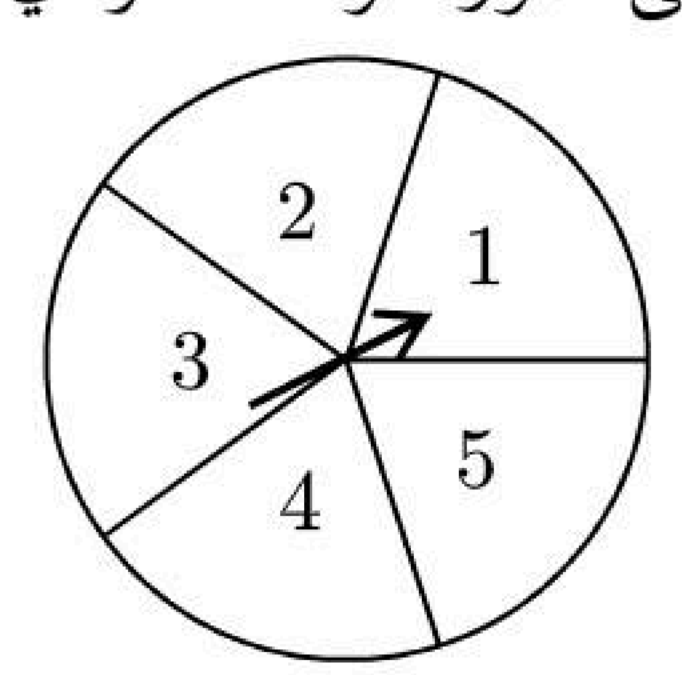
مسائل محلولة

(١) وعاء به 5 خرزات خضراء و 7 خرزات صفراء و 9 خرزات زرقاء. سحبنا عشوائياً خرزة واحدة من الوعاء. ما احتمال أن تكون الخرزة خضراء أو صفراء ؟

(٢) أطلق أحمد وبدر النار معاً على هدف. إذا كان احتمال أن يصيب أحمد الهدف هو 70% واحتمال أن يصيب بدر الهدف هو 80% فما احتمال أن يصيب بدر الهدف ويخطئ أحمد ؟

(٣) اخترنا عشوائياً عائلة مكونة من ثلاثة أطفال. ما احتمال أن يكون أحد أطفالها على الأقل ولداً ؟ (على اعتبار احتمال أن يكون الطفل ولداً يساوي احتمال أن يكون الطفل بنتاً).

(٤) رمينا قطعة نقود ثم دورنا دولاباً مقسوماً إلى خمسة أجزاء متساوية كما هو موضح في الرسم المرفق.بعد توقف الدولاب واستقرار قطعة النقود, ما احتمال حدث الحصول على صورة أو عدد فردي ؟

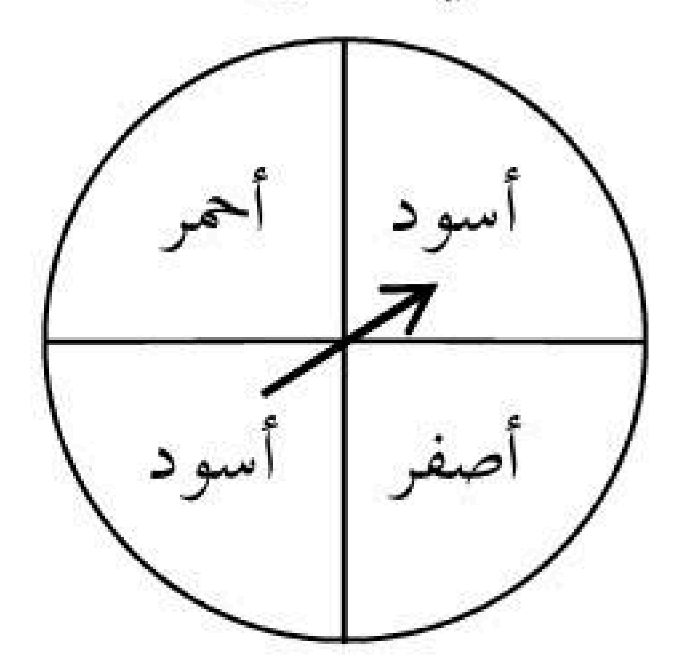


(٥) ذهب طلاب الصف الثالث متوسط وعددهم 30 طالباً في رحلة مدرسية. وعند سؤال مشرف الرحلة فيما إذا كان الطلاب يفضلون السباحة أو ركوب الدراجات كانت إجاباتهم على النحو التالي: 17 منهم يفضلون السباحة, 19 طالباً يفضلون ركوب الدراجات, طالبان فقط لا يفضلان أياً

من الخيارين, 8 طلاب يفضلون الخيارين. إذا اختار المشرف طالباً عشوائياً فما احتمال أنه يفضل السباحة علماً بأنه يفضل ركوب الدراجات أيضاً ؟

(٦) وضعنا أسماء 22 لاعباً لفريق كرة القدم بما فيهم قائد(كابتن) الفريق ومساعد قائد الفريق في وعاء. اخترنا 11 لاعباً عشوائياً لخوض المباراة النهائية على كأس ولي العهد. ما احتمال أن يكون قائد الفريق أو مساعد قائد الفريقوليس الاثنان معاًمن بينهم؟

(٧) بعد دوران الدولاب المبين في الشكل المرفق مرتين ثم توقفه ما احتمال أن يتوقف المؤشر على لونين مختلفين في الدورتين ؟

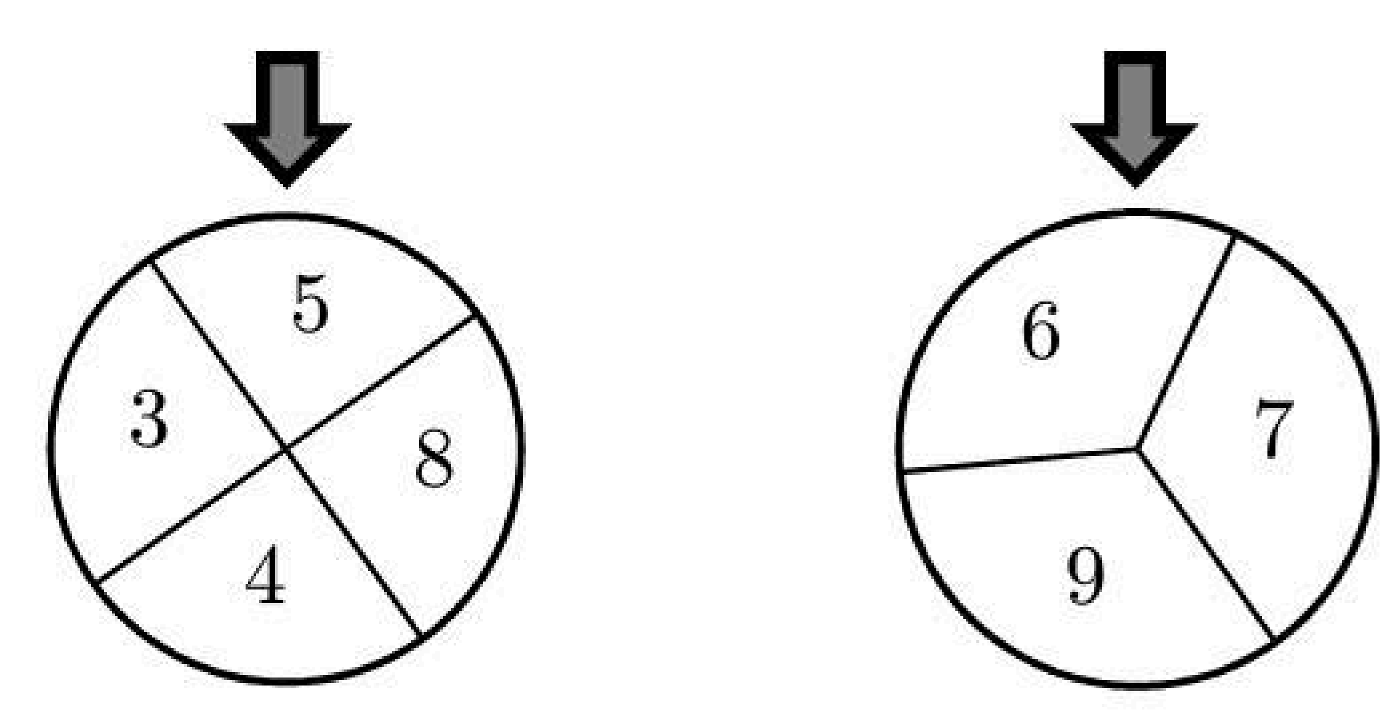


(٨) احتمال هبوب عاصفة رملية غداً على الرياض هو $\frac{1}{5}$. إذا هبت العاصفة الرملية على الرياض غداً فإن احتمال ذهاب وسيم إلى العمل هو $\frac{1}{2}$ وإذا كان الجو صافياً فإن احتمال ذهاب وسيم إلى العمل هو $\frac{19}{20}$. ما احتمال ذهاب وسيم إلى العمل غداً ؟

(٩) يستخدم كمال طريقة استخدام السهام لصيد الغزلان. ذهب كمال للصيد وفي جعبته خمسة سهام. إذا علمت أن كمال يصيب الغزال عند رمي السهم باحتمال 90% فما احتمال إصابة كمال للغزال باستخدام أربعة سهام على الأكثر من سهامه الخمسة ؟

(١٠) [AJHSME 1987] وعاء به عشر كرات مرقمة بالأعداد 1إلى 10. سحب جمال كرة من الوعاء عشوائياً. بعد ذلك سحب حسام كرة أخرى مختلفة عن الكرة التي سحبها جمال عشوائياً. ما احتمال أن يكون مجموع العددين على الكرتين المسحوبتين زوجياً ؟

(١١) [AJHSME 1989] عند تدوير الدولابين الموضحين في الشكل أدناه, يتم اختيار العددين عند المؤشرين. ما احتمال أن يكون مجموع العددين زوجياً ؟



(١٢) [AJHSME 1990] وعاء يحتوي على كرات زرقاء وكرات خضراء. إذا كان عدد الكرات الزرقاء هو 6واحتمال سحب كرة زرقاء عشوائياً هو $\frac{1}{4}$ فما عدد الكرات الخضراء ؟

(١٣) [AJHSME 1992] رمينا حجري نرد وسجلنا حاصل ضرب العددين. ما احتمال أن يكون حاصل الضرب أكبر من 10؟

(١٤) رمى كل من حسام وأحمد حجر نرد. ما احتمال أن يكون العدد الذي يظهر على حجر نرد حسام أكبر من العدد الذي يظهر على حجر نرد أحمد ؟

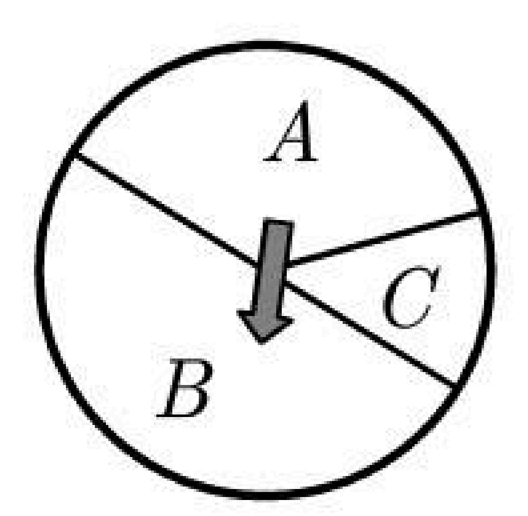
(١٥) [AJHSME 1996] اخترنا نقطة عشوائياً داخل منطقة دائرية. ما احتمال أن تكون النقطة أقرب إلى مركز الدائرة منها إلى محيط الدائرة ؟

(١٦) [AJHSME 1997] ثلاثة من طلاب فصل لهم أسماء مختلفة. كتبنا الأسماء في قائمة. ما احتمال أن تكون الأسماء مرتبة حسب الهجائية العربية ؟

(١٧) [AJHSME 1997] حجرا نرد لكل منهما 8 أوجه مرقمة بالأرقام $1, 2, \dots, 8$ حيث احتمالات ظهور الأعداد على الوجوه عند رمي الحجر جميعها متساوية. إذا رمينا الحجرين فما احتمال أن يكون حاصل ضرب العددين الظاهرين أكبر من 36 ؟

(١٨) [AJHSME 1998] اختار تحسين عددين مختلفين عشوائياً من المجموعة $\{8,9,10\}$ ثم جمعهما. واختار كريم عددين مختلفين عشوائياً من المجموعة $\{3,5,6\}$ ووجد حاصل ضربهما. ما احتمال أن تكون النتيجة التي حصل عليها تحسين أكبر من النتيجة التي حصل عليها كريم ؟

(١٩) [AMC8 2002] دولاب معلق على حائط مقسم إلى ثلاث مناطق A ، B ، C كما هو مبين في الشكل المرفق. احتمال أن يتوقف السهم في المنطقة A هو $\frac{1}{3}$ واحتمال توقفه في المنطقة B هو $\frac{1}{2}$. ما احتمال أن يتوقف السهم في المنطقة C؟



(٢٠) [AMC8 2007] لدينا أربع كرات لونها أحمر ومعلمة بالحروف A, B, C, D وأربع كرات لونها أخضر ومعلمة بالحروف A, B, C, D. سحبنا كرتين. ما احتمال أن تكون الكرتان من اللون نفسه أو معلمتين

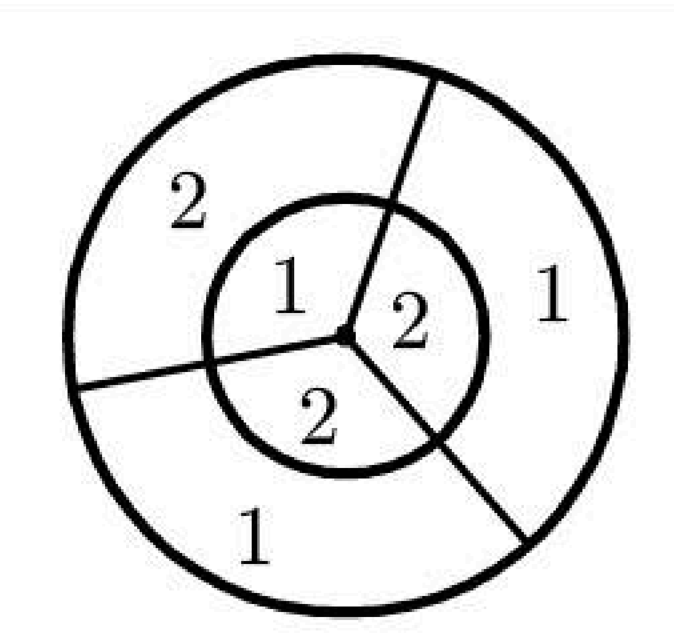
بالعلامة نفسها ؟

(٢١) [AMC8 2003] عند رمي حجر نرد ووقوعه على سطح طاولة فإننا لا نستطيع رؤية الوجه الأسفل. ما احتمال أن يكون حاصل ضرب الأعداد الخمسة التي نستطيع رؤيتها على الأوجه الخمسة يقبل القسمة على العدد 6؟

(٢٢) [AMC8 2007] كيس يحتوي على أربع قطع من الورق مرقمة بالأرقام $1, 2, 3, 4$ وأرقام جميع الورقات مختلفة. سحبنا ثلاث ورقات واحدة بعد الأخرى دون إرجاع لإنشاء عدد مكون من ثلاث مراتب. ما احتمال أن يكون هذا العدد مضاعفاً للعدد 3 ؟

(٢٣) [Aust.MC 1984] ثلاثة صناديق A , B , C ،يحتوي كل من الصندوقين A و B على كرة واحدة بيضاء ويحتوي الصندوق C على 16 كرة بيضاء وست كرات سوداء. اخترنا عشوائياً صندوقاً ثم سحبنا كرة من هذا الصندوق. ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء ؟

(٢٤) [AMC8 2007] في لوح لعبة الأسهم المبين في الشكل, نصف قطر الدائرة الكبيرة يساوي 6 ونصف قطر الدائرة الصغيرة يساوي 3. تقسم أنصاف أقطار كلاً من الدائرتين إلى ثلاث مناطق متطابقة مبيناً عليها القيمة العددية. احتمال أن يصيب السهم منطقة معينة هو نسبة مساحة هذه المنطقة إلى مساحة الدائرة الكبيرة. عند رمي سهمين على اللوح تكون النقاط التي حصل عليها اللاعب هي مجموع عددي المنطقتين اللتين وقع عليهما السهمان. ما احتمال أن تكون النقاط التي حصل عليها لاعب هي عدد فردي ؟



(٢٥) [Aust.MC 1988] ذهب سليم إلى محل ملابس لشراء قميص وكان في محفظته 12قطعة نقود, ثلاث قطع من كل من الفئات 10ريـــال, 20 ريـــال, 50ريـــال, 100ريـــال. لاحظ سليم أن محل الملابس لديه تخفيضات حيث يبيع القميص بمائة ريـــال فقط. بعد أن قرر سليم شراء القميص سحب ثلاث قطع نقود عشوائياً من محفظته. ما احتمال أن يكون مجموع الثلاث قطع على الأقل كافياً لدفع ثمن القميص ؟

(٢٦) [Aust.MC 1989] اتفق الصديقان أحمد وبدر المشهوران بنسيانهما للمواعيد على أن يلتقيا بعد الظهر في محل دنكن دونات لشربالقهوة. كلاهما نسي وقت اللقاء المتفق عليه ولكن كلاً منهما تذكر أن الموعدهو بين الساعة الثانية والخامسة مساءً. قرر كل منهما الذهاب للموعد بين الساعة الثانية والخامسة مساءً والانتظار نصف ساعة ومن ثم المغادرة إذا لم يحضر الصديق الآخر. ما احتمال أن يلتقي الصديقان في الموعد ؟

(٢٧) [Aust.MC 1982] أخذنا 16ورقة لعب مكونة من 4ملوك, 4ملكات، 4 شباب, 4آصات. بعد خلط الأوراق جيداً سحب عصام وهو الصادق دائماً ورقتين على التوالي عشوائياً. ثم صرح "على الأقل إحدى الورقتين هي ملكة". ما احتمال أن تكون كل من الورقتين ملكة ؟

(٢٨) [AMC10A, AMC12A 2002] اختارت ليلى عشوائياً عددين مختلفين من المجموعة $\{1,2,3,4,5\}$ واختارت سعاد عشوائياً عدداً من المجموعة $\{1,2,3,\cdots,10\}$. ما احتمال أن يكون العدد الذي اختارته سعاد أكبر من مجموع العددين اللذين اختارهما ليلى ؟

(٢٩) [AMC10A, AMC12A 2003] اخترنا عشوائياً قاسماً موجباً للعدد 60 . ما احتمال أن يكون هذا القاسم أصغر من 7 ؟

(٣٠) [AMC10A 2003] اخترنا نقطة (x,y) عشوائياً داخل المستطيل الذي رؤوسه $(0,0)$, $(0,1)$, $(4,0)$, $(4,1)$. مااحتمال أن يكون $x < y$ ؟

(٣١) [AMC10A 2003] ما احتمال أن يقبل عدد من المجموعة $\{1,2,3,\cdots,100\}$ القسمة على 2 ولا يقبل القسمة على 3 ؟

(٣٢) [AMC10B 2003] يحتوي وعاء على خرزتين من اللون الأحمر وخرزتين من اللون الأخضر. اسحب خرزة من الوعاء واستبدلها بخرزة حمراء بغض النظر عن لون الخرزة المسحوبة. ما احتمال أن تكون جميع الخرزات في الوعاء من اللون الأحمر بعد سحب واستبدال ثلاث خرزات ؟

(٣٣) [AMC10A 2004] اخترنا ثلاث نقاط عشوائياً من النقاط التسع المبينة في الشكل المرفق. إذا كانت احتمالات اختيار النقاط الثلاث جميعها متساوية فما احتمال أن تكون الثلاث نقاط على استقامة واحدة ؟

● ● ●

● ● ●

● ● ●

(٣٤) [AMC10A 2004] رمينا قطعة النقود A ثلاث مرات ورمينا قطعة النقود B أربع مرات. ما احتمال أن يكون عددا الصور التي حصلنا عليها من رمي قطعتي النقود متساويين ؟

(٣٥) [AMC10B 2004] رمينا حجري نرد لكل منهما 8 وجوه مرقمة بالأرقام من 1 إلى 8 وسجلنا العددين الظاهرين على الوجهين العلويين. ما احتمال أن يكون حاصل ضرب هذين العددين أكبر من مجموعهما ؟

(٣٦) [AMC10A 2005] علمنا ثلاث بلاطات بالعلامة X وعلمنا بلاطتين بالعلامة O. وضعنا الخمس بلاطات عشوائياً في صف. ما احتمال أن يكون الترتيب هو $XOXOX$ ؟

(٣٧) [AMC10B 2005] حجر نرد ذو ستة وجوه مرقمة بالأرقام $1,1,2,2,3,3$ وحجر نرد آخر ذو ستة وجوه مرقمة بالأرقام $4,4,5,5,6,6$. رمينا حجري النرد وسجلنا العددين الظاهرين على الوجهين العلويين. ما احتمال أن يكون مجموع هذين العددين فردياً ؟

(٣٨) [AMC10B 2005] رمينا 12 حجر نرد مرة واحدة.ما احتمال أن يكون حاصل ضرب الأعداد الظاهرة على الوجوه العلوية عدداً أولياً ؟

(٣٩) [AMC10B, AMC12B 2005] تحتوي محفظة على 8 قطع نقود: قطعتان من كل من الفئات: 1 ريـــال, 5 ريالات, 10 ريالات, 20 ريالاً. سحبنا قطعتي نقود عشوائياً من المحفظة. ما احتمال أن يكون مجموعهما 20 ريالاً فأكثر ؟

(٤٠) [AMC10B 2005] وضعنا 40 ورقة متماثلة في كيس بحيث يكون كل من الأعداد $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$ مكتوباً على أربع من هذه الورقات.

سحبنا أربع ورقات عشوائياً من الكيس دون إرجاع. لنفرض أن p هو احتمال أن تحمل الأوراق الأربع العدد نفسه وأن q هو احتمال أن تحمل ورقتان العدد a وأن تحمل الورقتان الأخريان العدد b حيث $a \neq b$. ما قيمة $\frac{q}{p}$؟

(٤١) [MAΘ 1991] جد احتمال أن يكون ملك السباتي بجانب الشاب القلبي في مجموعة من ورق اللعب الاعتيادية التي عددها 52 ورقة.

(٤٢) [AHSME 1970] اخترنا عدداً عشوائياً من بين جميع الأعداد المكونة من خمس مراتب والتي مجموع مراتبها يساوي 43 . ما احتمال أن يقبل العدد القسمة على 11؟

(٤٣) [Mandelbrot #3] في إحدى الجزر البعيدة يوجد نوعان من البشر هما الصادقون دائماً والكاذبون دائماً. $\frac{1}{5}$ سكان الجزيرة كاذبون وباقي السكان صادقون. سأل صاحب مركب ثلاثة أشخاص من سكان الجزيرة "هل الجو ماطر ؟" فكانت إجاباتهم جميعاً "نعم". ما احتمال أن يكون الجو هو بالفعل ماطراً ؟

(٤٤) [AHSME 1987] نجزئ 2.5 إلى عددين حقيقيين غير سالبين x و y عشوائياً وبانتظام. على سبيل المثال، إلى 2.143 و 0.357 أو إلى $\sqrt{3}$ و $2.5-\sqrt{3}$. بعد ذلك نقرب كلاً من العددين إلى أقرب عدد صحيح، على سبيل المثال، إلى 2 و 0 في الحالة الأولى و إلى 2 و 1 في الحالة الثانية. ما احتمال أن يكون مجموع العددين الصحيحين يساوي 3؟

(٤٥) [MAΘ 1987] أراد سليمان تغطية باب موقد منزله بشبك فصنع شبكاً

مكوناً من مربعات مفتوحة طول ضلع كل منها 5ميلمتر وكل من هذه المربعات محاط بإطار من السلك قطره1ميلمتر. تطايرت شرارة قطرها 2 ميلمتر من النار واتجهت مباشرة نحو الشبك. ما احتمال أن تخطئ هذه الشرارة إطار السلك ؟

(٤٦) [MAΘ 2011] يمتلك بهاء حجر نرد ثماني الوجوه مرقمة بالأعداد من 1إلى 8. رمى بهاء حجر النرد ثلاث مرات. ما احتمال أن يكون مجموع الأعداد الظاهرة على الوجوه يساوي 22؟

(٤٧) [MAΘ 2011] رمى حسام حجري نرد وجوه كل منهما مرقمة بالأعداد من1إلى 6مرة واحدة. إذا كان مجموع العددين الظاهرين يساوي 8. فما احتمال أن يكون العددان الظاهران متساويين ؟

(٤٨) [MAΘ 2010] سحبنا ورقة من مجموعة ورق اللعب الاعتيادية (52ورقة) ورمينا حجر نرد. ما احتمال ظهور العدد 3على الأقل مرة واحدة ؟

(٤٩) [MAΘ 2010] اخترنا عددين حقيقيين xو yحيث $0 \le x \le 2$و $0 \le y \le 2$عشوائياً. ما احتمال أن يكون مجموع مربعيهما أكبر من 2؟

(٥٠) [MAΘ 2007] لنفرض أن A , B , Cثلاثة أحداث مستقلة احتمالات وقوعها هي 1, 0.5, 0.7على التوالي.ما احتمال وقوع اثنين منها بالضبط ؟

(٥١) [MAΘ 2007] اخترنا عددين حقيقيين xو yعشوائياً في الفترة $[-1,1]$. ما احتمال أن يكون $|x + y| > 0.5$؟

(٥٢) [Pascal 2009] رمى كل من أحمد وبدر حجري نرد مرة واحدة. يكون أحمد هو الرابح إذا كان الفرق بين العددين الظاهرين يساوي 1. مااحتمال

أن يربح أحمد ؟

(٥٣) [MAΘ 2005] اخترنا عددين حقيقيين عشوائياً من الفترة $[-20,10]$. ما احتمال أن يكون حاصل ضربهما أكبر من الصفر ؟

(٥٤) [MAΘ 2005] تقابل أربعة أصدقاء لتناول وجبة الغداء في أحد مطاعم الرياض. أثناء تناولهم للغداء وضع كل منهم مفتاح سيارته وسط المائدة وعند مغادرتهم للمطعم تناول كل منهم أحد المفاتيح عشوائياً. ما احتمال أن يكون على الأقل أحدهم أخذ مفتاح سيارته ؟

(٥٥) [مسألة مونتي هول Monty Hall Problem]

مونتي هول هو مقدم برنامج مسابقات في إحدى قنوات التلفاز حيث قيمة الجائزة للمتسابق الرابح هي سيارة جديدة. قوانين المسابقة هي على النحو التالي: توجد ثلاثة أبواب مقفلة مرقمة بالأرقام $1,\ 2,\ 3$ وراء أحدها سيارة جديدة ووراء كل من البابين الآخرين ماعز. يختار المتسابق أحد الأبواب الذي يعتقد أن خلفه السيارة. بعد ذلك يفتح مقدم البرنامج مونتي هول أحد البابين الآخرين فتظهر ماعز وراء الباب ومن ثم يسأل المتسابق ما إذا كان يرغب بتغيير الباب الذي اختاره أم يبقى على خياره. هل يغير المتسابق الباب وما احتمال أن يكسب السيارة ؟

(٥٦) وعاء يحتوي على 3 خرزات حمراء و n خرزة زرقاء. إذا كان احتمال سحب خرزتين زرقاوين يساوي احتمال سحب خرزتين من لونين مختلفين فجد

قيمة n.

(٥٧) [AHSME 1994] كيس من الفشار (حب الذرة) ثلثا حباته من اللون

الأبيض والثلث الباقي من اللون الأصفر. عند وضع حبات الذرة على النار لعمل الفشار, نصف الحبات البيض ستتفتق (تفرقع) وثلثا الحبات الصفراء ستتفتق. اخترنا حبة ذرة عشوائياً من الكيس ووضعناها على النار فتفتقت. ما احتمال أن تكون من الذرة البيضاء اللون ؟

(٥٨) لتكن $S = \{1, 2, \cdots, 10\}$ ولتكن A مجموعة جزئية من S عدد عناصرها يساوي 4. اخرتنا عشوائياً مجموعة جزئية B من S مكونة من 4 عناصر. ما احتمال أن تكون المجموعتان A و B منفصلتين ؟

(٥٩) [AIME 1989] ألقينا قطعة نقود خمس مرات. إذا كان احتمال الحصول على صورة واحدة فقط ليس صفراً ويساوي احتمال الحصول على صورتين فقط فما احتمال الحصول على ثلاث صور فقط ؟

(٦٠) [AHSME 1997] حجرا نرد كل منهما مكون من ستة وجوه. وجوه أحدهما مرقمة بالأرقام $1, 2, 3, 3, 5, 6$ ووجوه الآخر مرقمة بالأرقام $1, 2, 4, 4, 5, 6$. ألقينا حجري النرد مرة واحدة وسجلنا مجموع العددين الظاهرين. ما احتمال أن يكون هذا المجموع عدداً فردياً ؟

(٦١) [MAΘ 1992] يلعب فريقان عدداً من المباريات ضد بعضهما البعض حتى يكسب أحدهما أربع مباريات وبعدها يتوقفان. إذا كان احتمال أن يكسب أحد الفريقين مساوياًلاحتمال أن يكسب الفريق الآخر فما احتمال أن يتوقفا بعد 6 مباريات ؟

(٦٢) [MAΘ 1991] اخترنا نقطة P, عشوائياًمن القطعة AB حيث M هي منتصف AB. ما احتمال إمكانية تكوين مثلث من القطع AP, PB, AM؟

حلول المسائل

(١) وعاء به 5 خرزات خضراء و 7 خرزات صفراء و 9 خرزات زرقاء. سحبنا عشوائياً خرزة واحدة من الوعاء. ما احتمال أن تكون الخرزة خضراء أو صفراء ؟

الحل

عدد الخرزات الخضراء و الصفراء هو $5 + 7 = 12$. عدد الخرزات في الوعاء هو $5 + 7 + 9 = 21$. إذن, احتمال أن تكون الخرزة خضراء أو صفراء هو $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

.

(٢) أطلق أحمد وبدر النار معاً على هدف. إذا كان احتمال أن يصيب أحمد الهدف هو 70% واحتمال أن يصيب بدر الهدف هو 80% فما احتمال أن يصيب بدر الهدف ويخطئ أحمد ؟

الحل

لنفرض أن A هو حدث إصابة أحمد للهدف وأن B هو حدث إصابة بدر للهدف. عندئذ, $P(A) = 0.7$ و $P(B) = 0.8$. المطلوب هو $P(B \cap A')$. لاحظ أن الحدثين منفصلان. إذن,

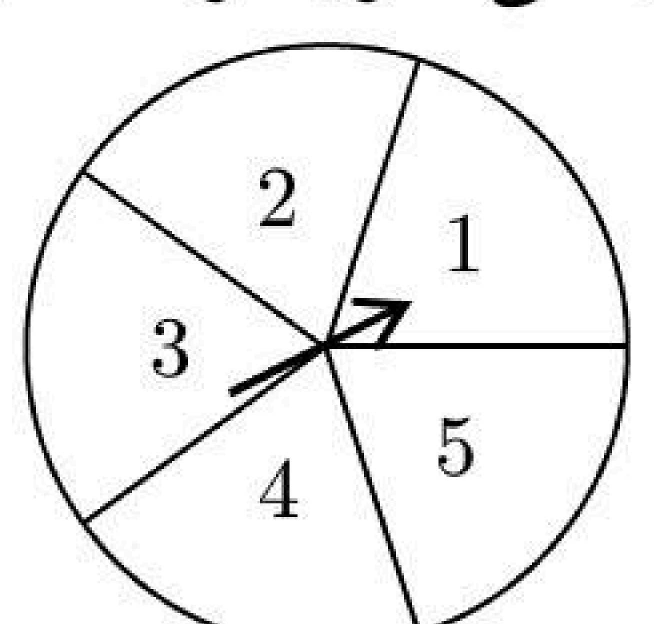
$$\begin{aligned} P(B \cap A') &= P(B)P(A') = P(B)(1 - P(A)) \\ &= 0.8 \times (1 - 0.7) = 0.24 \end{aligned}$$

(٣) اخترنا عشوائياً عائلة مكونة من ثلاثة أطفال. ما احتمال أن يكون أحد أطفالها على الأقل ولداً ؟ (على اعتبار احتمال أن يكون الطفل ولداً يساوي احتمال أن يكون الطفل بنتاً).

الحل

إذا رمزنا للبنت بالرمز G وللولد بالرمز B فنرى أن $P(B) = P(G) = \frac{1}{2}$.
لاحظ أن فضاء العينة هو $\{GGG, GGB, GBG, BGG, BBG, BGB, GBB, BBB\}$. الآن, حدث عدم وجود ولد هو GGG واحتمال ذلك هو $\frac{1}{8}$. ولذا فاحتمال أن يكون لدى العائلة ولد واحد على الأقل هو $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

(٤) رمينا قطعة نقود ثم دورنا دولاباً مقسوماً إلى خمسة أجزاء متساوية كما هو موضح في الرسم المرفق. بعد توقف الدولاب واستقرار قطعة النقود, ما احتمال حدث الحصول على صورة أو عدد فردي ؟



الحل

فضاء العينة هو

$S = \{(H,1), (H,2), (H,3), (H,4), (H,5), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5)\}$.

حدث الحصول على صورة أو عدد فردي هو

$A = \{(H,1), (H,2), (H,3), (H,4), (H,5), (T,1), (T,3), (T,5)\}$.

إذن, $P(A) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

حل آخر: لنفرض أن H هو حدث الحصول على صورة وأن O هو حدث

الحصول على عدد فردي.المطلوب هو $P(H \cup O)$.

$$P(H \cup O) = P(H) + P(O) - P(H \cap O)$$
$$= P(H) + P(O) - P(H)P(O) = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

(٥) ذهب طلاب الصف الثالث متوسط وعددهم 30 طالباً في رحلة مدرسية. وعند سؤال مشرف الرحلة فيما إذا كان الطلاب يفضلون السباحة أو ركوب الدراجات كانت إجاباتهم على النحو التالي: 17منهم يفضلون السباحة, 19طالباً يفضلون ركوب الدراجات, طالبان فقط لا يفضلان أياً من الخيارين, 8طلاب يفضلون الخيارين. إذا اختار المشرف طالباً عشوائياً فما احتمال أنه يفضل السباحة علماً بأنه يفضل ركوب الدراجات أيضاً ؟

الحل

لنفرض أن Sهو حدث تفضيل السباحة وأن Rهو حدث تفضيل ركوب الدراجات. الاحتمال المطلوب هو $P(S \mid R)$. الآن، $P(S \mid R) = \dfrac{P(S \cap R)}{P(R)}$

.

ولكن $P(R) = \dfrac{17}{30}$ و $P(S \cap R) = \dfrac{8}{30}$. إذن, $P(S \mid R) = \dfrac{\frac{8}{30}}{\frac{17}{30}} = \dfrac{8}{17}$.

(٦) وضعنا أسماء 22لاعباً لفريق كرة القدم بما فيهم قائد(كابتن) الفريق ومساعد قائد الفريق في وعاء. اخترنا 11لاعباً عشوائياً لخوض المباراة النهائية على كأس ولي العهد. ما احتمال أن يكون قائد الفريق أو مساعد

قائد الفريقوليس الاثنان معاً من بينهم ؟

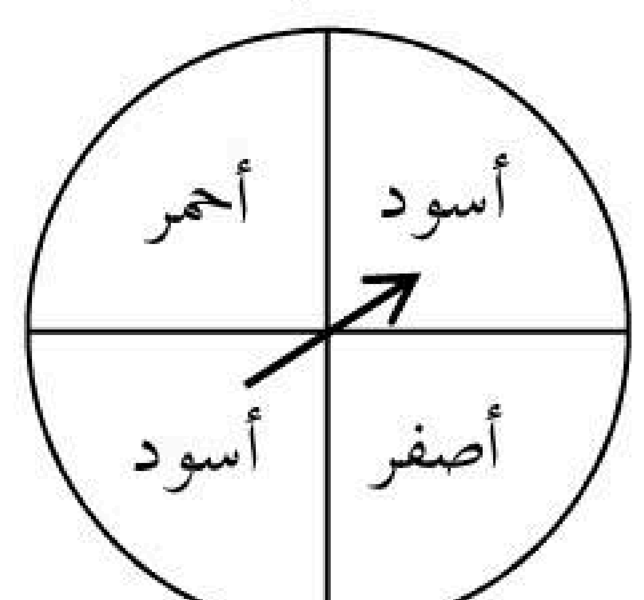
الحل

لنفرض أن C هو حدث اختيار الكابتن وأن V هو حدث اختيار مساعد الكابتن.

المطلوب هو $P(C \cup V)$. وبما أن $C \cap V = \varnothing$ فإن

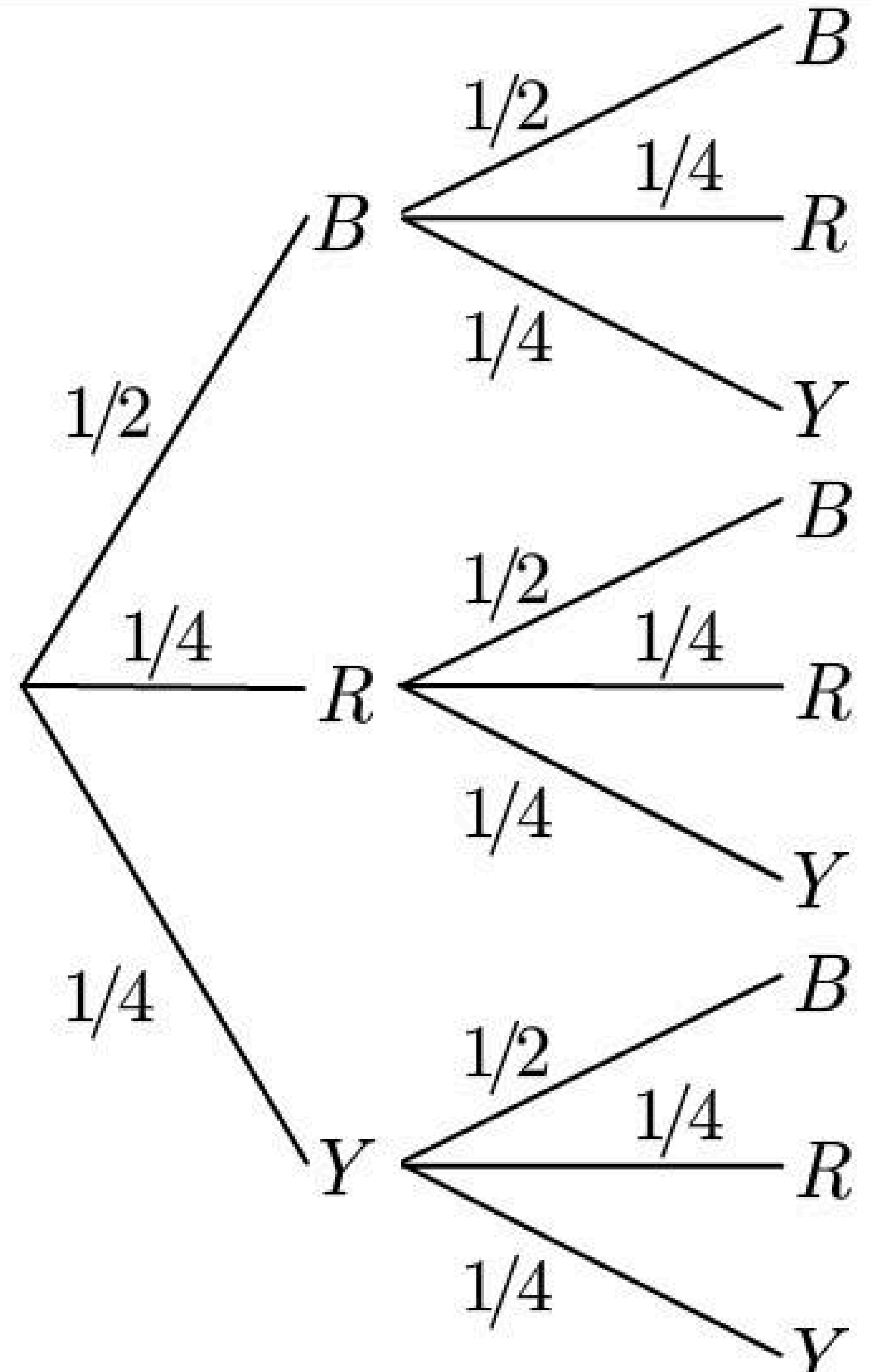
$$P(C \cup V) = P(C) + P(V) = \frac{1}{22} + \frac{1}{22} = \frac{1}{11}.$$

(٧) بعد دوران الدولاب المبين في الشكل المرفق مرتين ثم توقفه، ما احتمال أن يتوقف المؤشر على لونين مختلفين في الدورتين ؟



الحل

أفضل طريقة لحل هذه المسألة هي استخدام الشجرة البيانية.



حيث B ، R ، Y ترمز إلى حدث توقف المؤشر على اللون الأسود، الأحمر، الأصفر على التوالي.

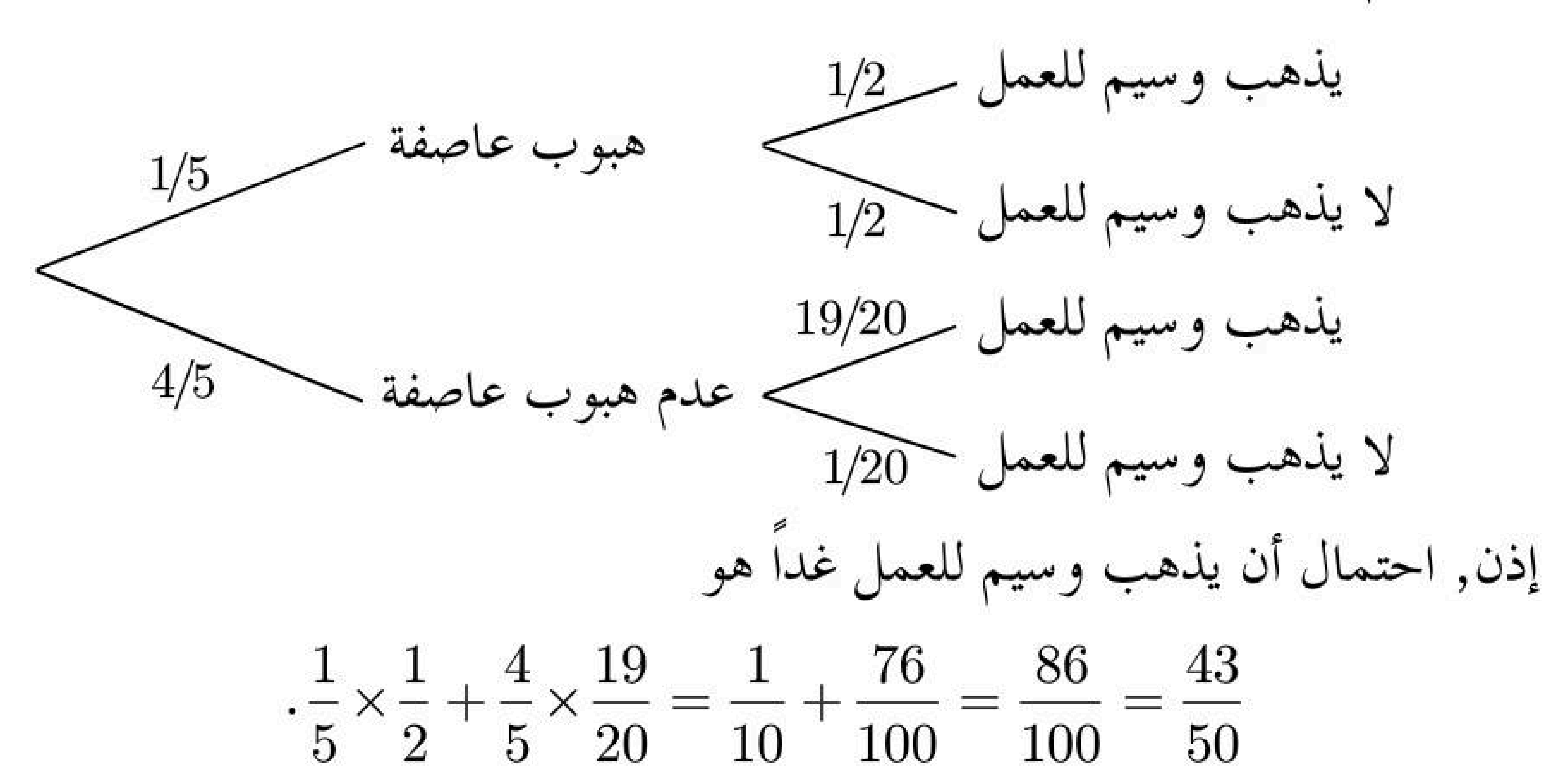
المطلوب هو احتمال توقف المؤشر عند لونين مختلفين. لاحظ أن احتمال توقف المؤشر عند اللون نفسه في الدروتين هو $\frac{3}{8} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$.

إذن, احتمال توقف المؤشر عند لونين مختلفين في الدورتين هو $\frac{5}{8} = 1 - \frac{3}{8}$.

(٨) احتمال هبوب عاصفة رملية غداً على الرياض هو $\frac{1}{5}$. إذا هبت العاصفة الرملية على الرياض غداً فإن احتمال ذهاب وسيم إلى العمل هو $\frac{1}{2}$ وإذا كان الجو صافياً فإن احتمال ذهاب وسيم إلى العمل هو $\frac{19}{20}$. ما احتمال ذهاب وسيم إلى العمل غداً ؟

الحل

باستخدام الشجرة البيانية نجد أن



إذن, احتمال أن يذهب وسيم للعمل غداً هو

$$\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{19}{20}=\frac{1}{10}+\frac{76}{100}=\frac{86}{100}=\frac{43}{50}.$$

(٩) يستخدم كمال طريقة استخدام السهام لصيد الغزلان. ذهب كمال للصيد وفي جعبته خمسة سهام. إذا علمت أن كمال يصيب الغزال عند رمي السهم باحتمال 90%فما احتمال إصابة كمال للغزال باستخدام أربعة سهام على الأكثر من سهامه الخمسة ؟

الحل

احتمال النجاح هنا هو $p = 0.9$. واحتمال الفشل $q = 0.1$. المطلوب هو حساب $P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$.

ولكن هذا الاحتمال يساوي $1 - P(X = 5)$. ولذا فإن

$$1 - P(X = 5) = 1 - C(5,5)(0.9)^5(0.1)^0 = 1 - (0.9)^5$$

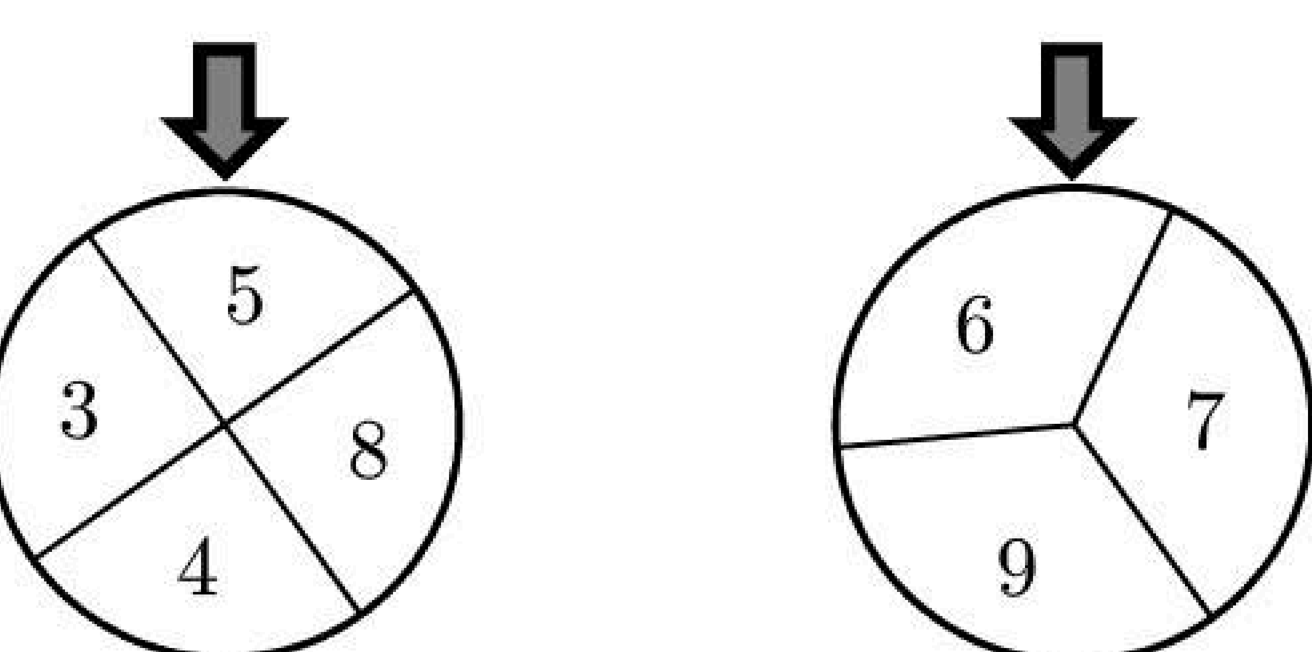
(١٠) [AJHSME 1987] وعاء به عشر كرات مرقمة بالأعداد 1إلى 10. سحب جمال كرة من الوعاء عشوائياً. بعد ذلك سحب حسام كرة

أخرى مختلفة عن الكرة التي سحبها جمال عشوائياً. ما احتمال أن يكون مجموع العددين على الكرتين المسحوبتين زوجياً ؟

الحل

لكي يكون مجموع العددين زوجياً يجب أن يكون العددان فرديين أو أن يكونا زوجيين. عدد الأعداد الزوجية يساوي 5 وعدد الأعداد الفردية يساوي 5. مهما كان نوع العدد الذي سحبه جمال فإن عدد الكرات الباقية في الوعاء والمرقمة بنفس نوع العدد المسحوب يساوي 4. إذن, الاحتمال هو $\frac{4}{9}$.

(١١) [AJHSME 1989] عند تدوير الدولابين الموضحين في الشكل أدناه, يتم اختيار العددين عند المؤشرين. ما احتمال أن يكون مجموع العددين زوجياً ؟



الحل

لكي يكون مجموع العددين زوجياً يجب أن يكون العددان من نفس النوعية (إما فرديان أو زوجيان). على الدولاب الأول عددان زوجيان وعددان فرديان. فلذا مهما كان العدد الذي سيتوقف عنده الدولاب الثاني فاحتمال أن يتوقف الدولاب الأول عند عدد من نفس النوعية هو $\frac{1}{2}$.

(١٢) [AJHSME 1990] وعاء يحتوي على كرات زرقاء وكرات خضراء. إذا

كان عدد الكرات الزرقاء هو 6 واحتمال سحب كرة زرقاء عشوائياً هو $\frac{1}{4}$ فما عدد الكرات الخضراء ؟

الحل

لنفرض أن x هو عدد الكرات التي يحتويها الوعاء. بما أن $\frac{1}{4}$ الكرات زرقاء نرى أن $6 = \frac{1}{4}x$. إذن $x = 24$. ويكون عدد الكرات الخضراء هو $24 - 6 = 18$.

حل آخر: بما أن ربع الكرات هي زرقاء فإن ثلاثة أرباع الكرات يجب أن تكون خضراء. وبهذا فعدد الكرات الخضراء هو ثلاثة أضعاف عدد الكرات الزرقاء. أي أن $3 \times 6 = 18$.

(١٣) [AJHSME 1992] رمينا حجري نرد وسجلنا حاصل ضرب العددين. ما احتمال أن يكون حاصل الضرب أكبر من 10؟

الحل

بعمل جدول لفضاء العينة نجد أن

$\times$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

ولهذا فعدد عناصر حدث "حاصل الضرب أكبر من 10" يساوي 17. إذن, الاحتمال هو $\frac{17}{36}$.

(١٤) رمى كل من حسام وأحمد حجر نرد. ما احتمال أن يكون العدد الذي يظهر على حجر نرد حسام أكبر من العدد الذي يظهر على حجر نرد أحمد ؟

الحل

لنفرض أن العدد الذي ظهر على حجر نرد حسام هو H وأن العدد الذي ظهر على حجر نرد أحمد هو A . المطلوب معرفة عدد مرات ظهور (H,A)حيث $H > A$. فضاء العينة هو

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
\boxed{(2,1)} & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
\boxed{(3,1)} & \boxed{(3,2)} & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
\boxed{(4,1)} & \boxed{(4,2)} & \boxed{(4,3)} & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
\boxed{(5,1)} & \boxed{(5,2)} & \boxed{(5,3)} & \boxed{(5,4)} & (5,5) & (5,6) \\
\boxed{(6,1)} & \boxed{(6,2)} & \boxed{(6,3)} & \boxed{(6,4)} & \boxed{(6,5)} & (6,6)
\end{array}$$

عدد هذه الازواج هو 15 . إذن, الاحتمال هو $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

حل آخر: عدد عناصر فضاء العينة هو $36 = 6 \times 6$. 6من هذه الأزواج متساوية الإحداثيات و 30 زوجاًمختلفة الإحداثيات.من الثلاثين المختلفة الإحداثيات 15منها الإحداثي الأول أكبر من الإحداثي الثاني. إذن الاحتمال هو $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

(١٥) [AJHSME 1996] اخترنا نقطة عشوائياً داخل منطقة دائرية. ما احتمال أن تكون النقطة أقرب إلى مركز الدائرة منها إلى محيط الدائرة ؟

الحل

قم برسم دائرة نصف قطرها 2ودائرة داخلها تشترك معها في المركز نصف قطرها

1. الآن, محيط الدائرة الداخلية هو مجموعة جميع النقاط التي تبعد مسافة 1عن المركز وتبعد المسافة نفسها عن محيط الدائرة الخارجية. الآن, إذا اخترنا نقطة عشوائياً داخل منطقة دائرية ولتكن B فإن احتمال أن تكون هذه النقطة داخل منطقة جزئية A من B هو النسبة بين مساحة A و B. ولكن مساحة B تساوي $4\pi = \pi \times 2^2$ ، مساحة A تساوي $\pi = \pi \times 1^2$. إذن, الاحتمال هو $\frac{1}{4} = \frac{\pi}{4\pi}$.

(١٦) [AJHSME 1997] ثلاثة من طلاب فصل لهم أسماء مختلفة. كتبنا الأسماء في قائمة. ما احتمال أن تكون الأسماء مرتبة حسب الهجائية العربية ؟

الحل

لنفرض أن الأسماء تبدأ بالحروف أ, ب, ج. الترتيبات الممكنة لهذه الحروف هي: أ ب ج, أ ج ب, ب أ ج, ب ج أ, ج أ ب, ج ب أ وعددها 6. ولكن الترتيب الهجائي الوحيد بينها هو أ ب ج. إذن, الاحتمال هو $\frac{1}{6}$.

حل آخر: عدد طرق اختيار الطالب الأول هو 3وعدد طرق اختيار الطالب الثاني هو 2وعدد طرق اختيار الطالب الثالث هو1. إذن, عدد طرق اختيار الطلاب الثلاثة هو $3 \times 2 \times 1 = 6$. وهناك اختيار واحد فقط لكي يكونوا مرتبين هجائياً إذن, الاحتمال هو $\frac{1}{6}$.

(١٧) [AJHSME 1997] حجرا نرد لكل منهما 8أوجه مرقمة بالأرقام $1, 2, \cdots, 8$ حيث احتمالات ظهور الأعداد على الوجوه عند رمي الحجر جميعها متساوية. إذا رمينا الحجرين فما احتمال أن يكون حاصل

ضرب العددين الظاهرين أكبر من 36؟

الحل

عدد عناصر فضاء العينة هو $64 = 8 \times 8$. حدث الحصول على عددين حاصل ضربهما أكبر من 36 هو

$\{(5,8),(6,7),(6,8),(7,6),(7,7),(7,8),(8,5),(8,6),(8,7),(8,8)\}$.

عدد العناصر يساوي 10. إذن, الاحتمال هو $\frac{10}{64} = \frac{5}{32}$.

(١٨) [AJHSME 1998] اختار تحسين عددين مختلفين عشوائياً من المجموعة $\{8,9,10\}$ثم جمعهما. واختار كريم عددين مختلفين عشوائياً من المجموعة $\{3,5,6\}$ووجد حاصل ضربهما. ما احتمال أن تكون النتيجة التي حصل عليها تحسين أكبر من النتيجة التي حصل عليها كريم ؟

الحل

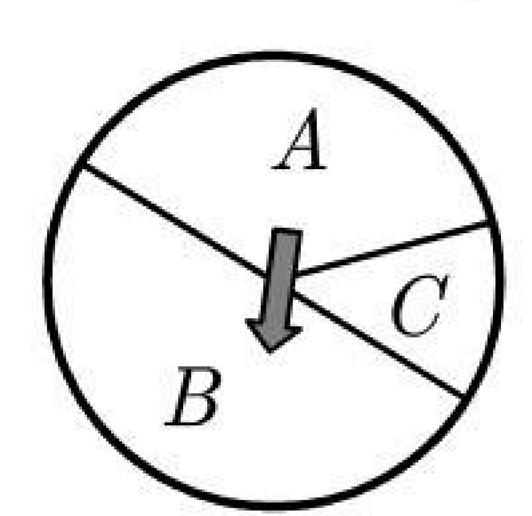
القيم التي يحصل عليها تحسين هي $8 + 9 = 17$، $8 + 10 = 18$، $9 + 10 = 19$.

والقيم التي يحصل عليها كريم هي $3 \times 5 = 15$، $3 \times 6 = 18$، $5 \times 6 = 30$.

إذا حصل تحسين على 17فاحتمال أن يكون ذلك أكبر مما حصل عليه كريم هو $\frac{1}{3}$(لأن 17أكبر من 15فقط).إذا حصل تحسين على 18فاحتمال أن يكون ذلك أكبر مما حصل عليه كريم هو $\frac{1}{3}$أيضاً (18أكبر فقط من 15). إذا حصل تحسين على 19فاحتمال أن يكون ذلك أكبر مما حصل عليه كريم هو $\frac{2}{3}$(لأن 19أكبر من 15و 18).واحتمال أن يختار تحسين أياً من المجاميع الثلاثة هو $\frac{1}{3}$. إذن,

الاحتمال المطلوب هو $\frac{4}{9} = \frac{1}{3}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$.

(١٩) [AMC8 2002] دولاب معلق على حائط مقسم إلى ثلاث مناطق A , B , C كما هو مبين في الشكل المرفق. احتمال أن يتوقف السهم في المنطقة A هو $\frac{1}{3}$ واحتمال توقفه في المنطقة B هو $\frac{1}{2}$. ما احتمال أن يتوقف السهم في المنطقة C؟



الحل

بما أن مجموع الاحتمالات يساوي 1 فإن احتمال أن يتوقف السهم في المنطقة C هو $\frac{1}{6} = 1-\frac{5}{6} = 1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$.

(٢٠) [AMC8 2007] لدينا أربع كرات لونها أحمر ومعلمة بالحروف A, B, C, D وأربع كرات لونها أخضر ومعلمة بالحروف A, B, C, D. سحبنا كرتين. ما احتمال أن تكون الكرتان من اللون نفسه أو معلمتين بالعلامة نفسها ؟

الحل

عدد طرق اختيار كرتين من 8 كرات هو $28 = \frac{56}{2} = \frac{8\times 7}{2}$.

عدد طرق اختيار كرتين من اللون الأحمر هو $6 = \frac{4\times 3}{2}$.

عدد طرق اختيار كرتين من اللون الأخضر هو $6 = \frac{4\times 3}{2}$.

عدد طرق اختيار كرتين معلمتين بالحرف نفسه هو 4 (AA , BB , CC , DD). إذن, الاحتمال المطلوب هو $\frac{4}{7} = \frac{6+6+4}{28}$.

لاحظ أن هذا الاحتمال هو: $\frac{4}{7} = \frac{C(4,2)+C(4,2)+4}{C(8,2)}$.

حل آخر: لنفرض أن C هو حدث اختيار كرتين من اللون نفسه وأن L هو حدث اختيار كرتين لهما نفس الحرفين. عندئذ،

$\frac{12}{28} = \frac{C(4,2)+C(4,2)}{C(8,2)} = P(C)$ وأن $P(L) = \frac{4C(2,2)}{C(8,2)} = \frac{4}{28}$. وبما أن $C \cap L = \varnothing$ فإن الاحتمال المطلوب هو

$$\frac{4}{7} = \frac{16}{28} = \frac{12}{28} + \frac{4}{28} = P(C \cup L) = P(C) + P(L).$$

(٢١) [AMC8 , 2003] عند رمي حجر نرد ووقوعه على سطح طاولة فإننا لا نستطيع رؤية الوجه الأسفل. ما احتمال أن يكون حاصل ضرب الأعداد الخمسة التي نستطيع رؤيتها على الأوجه الخمسة يقبل القسمة على العدد 6؟

الحل

هناك خياران, إما أن يكون الوجه غير الظاهر يساوي 6 أو لا يساوي 6. إذا كان يساوي 6 فحاصل ضرب الأعداد الخمسة الأخرى هو $120 = 5\times 4\times 3\times 2\times 1$ وهذا العدد يقبل القسمة على العدد 6. أما إذا كان لا يساوي 6 فسيظهر العدد 6 في حاصل ضرب الخمسة أعداد الظاهرة ومن ثم فهو يقبل القسمة على العدد 6. إذن, الاحتمال هو 1.

(٢٢) [AMC8 2007] كيس يحتوي على أربع قطع من الورق مرقمة بالأرقام $1, 2, 3, 4$ وأرقام جميع الورقات مختلفة. سحبنا ثلاث ورقات واحدة بعد الأخرى دون إرجاع لإنشاء عدد مكون من ثلاث مراتب. ما احتمال أن يكون هذا العدد مضاعفاً للعدد 3 ؟

الحل

الأعداد المضاعفة للعدد 3 هي تبديلات العدد 123 وعددها 6 وتبديلات العدد 234 وعددها أيضاً 6. عدد طرق سحب الثلاثة أعداد هو $24 = 2\times 3\times 4$.

إذن, الاحتمال هو $\frac{1}{2} = \frac{6+6}{24}$.

أو إذا لم يكن الترتيب مهمّاً (وهذا هو الحال هنا) فعدد طرق اختيار ثلاثة أعداد من 4 هو 4 وعدد طرق اختيار عدد مضاعف للعدد 3 هو 2 (123 أو 234).

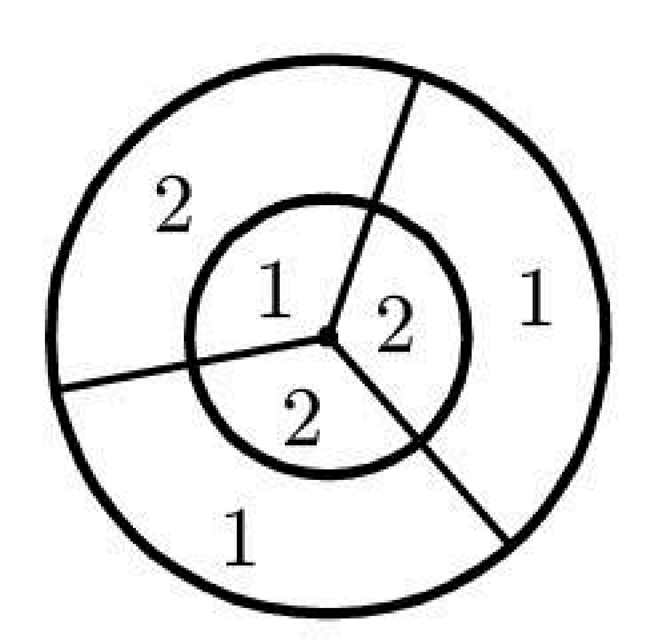
إذن، الاحتمال هو $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

(٢٣) [Aust.MC 1984] ثلاثة صناديق A , B , C، يحتوي كل من الصندوقين A و B على كرة واحدة بيضاء ويحتوي الصندوق C على 16 كرة بيضاء وست كرات سوداء. اخترنا عشوائياً صندوقاً ثم سحبنا كرة من هذا الصندوق. ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء ؟

الحل

احتمال اختيار كل من الصناديق هو $\frac{1}{3}$. إذن, احتمال أن تكون الكرة بيضاء هو $\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{16}{22} = \frac{10}{11}$.

(٢٤) [AMC8 2007]في لوح لعبة الأسهم المبين في الشكل, نصف قطر الدائرة الكبيرة يساوي 6 ونصف قطر الدائرة الصغيرة يساوي 3 . تقسم أنصاف الأقطار كلاً من الدائرتين إلى ثلاث مناطق متطابقة مبيناً عليها القيمة العددية. احتمال أن يصيب السهم منطقة معينة هو نسبة مساحة هذه المنطقة إلى مساحة الدائرة الكبيرة. عند رمي سهمين على اللوح تكون النقاط التي حصل عليها اللاعب هي مجموع عددي المنطقتين اللتين وقع عليهما السهمان. ما احتمال أن تكون النقاط التي حصل عليها لاعب هي عدد فردي ؟



الحل

نقوم اولاً بحساب مساحة المناطق المختلفة.

مساحة كل من المناطق الداخلية يساوي ثلث مساحة الدائرة الصغيرة أي

$$\frac{1}{3} \times 9\pi = 3\pi$$

مساحة كل من الحلقات تساوي ثلث الفرق بين مساحتي الدائرتين. أي

$$\frac{1}{3}(36\pi - 9\pi) = \frac{27\pi}{3} = 9\pi$$

احتمال أن يقع السهم على عدد فردي هو

$$\frac{3\pi + 9\pi + 9\pi}{36\pi} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

(لاحظ وجود عدد فردي واحد في الدائرة الصغيرة وعددين فرديين في المنطقتين الواقعتين بين الدائرتين).

احتمال أن يقع السهم على عدد زوجي هو

$$\frac{3\pi+3\pi+9\pi}{36\pi}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$ (أو $1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$).

الآن, نحصل على مجموع فردي من(فردي وزوجي) أو (زوجي وفردي). إذن, احتمال الحصول على مجموع فردي هو $\frac{35}{72}=\frac{7}{12}\times\frac{5}{12}+\frac{5}{12}\times\frac{7}{12}$.

(٢٥) [Aust.MC 1988] ذهب سليم إلى محل ملابس لشراء قميص وكان في محفظته 12قطعة نقود, ثلاث قطع من كل من الفئات 10ريال, 20 ريال, 50ريال, 100ريال. لاحظ سليم أن محل الملابس لديه تخفيضات حيث يبيع القميص بمائة ريال فقط. بعد أن قرر سليم شراء القميص سحب ثلاث قطع نقود عشوائياً من محفظته. ما احتمال أن يكون مجموع الثلاث قطع على الأقل كافياً لدفع ثمن القميص ؟

الحل

يكون مجموع الثلاث قطع غير كاف لدفع ثمن القميص (أي المجموع أصغر من 100) إذا كانت مكونة من الفئات التالية:

(0قطعة من فئة 50وثلاث قطع من فئة 10أو 20)أو (1قطعة من فئة 50 وقطعتين من فئة 10أو 20). عدد هذه الطرق هو

$$C(3,0)C(6,3)+C(3,1)C(6,2)=1\times 20+3\times 15=65$$

وعدد طرق اختيار 3قطع من 12قطعة هو $C(12,3)=\frac{12\times 11\times 10}{6}=220$.

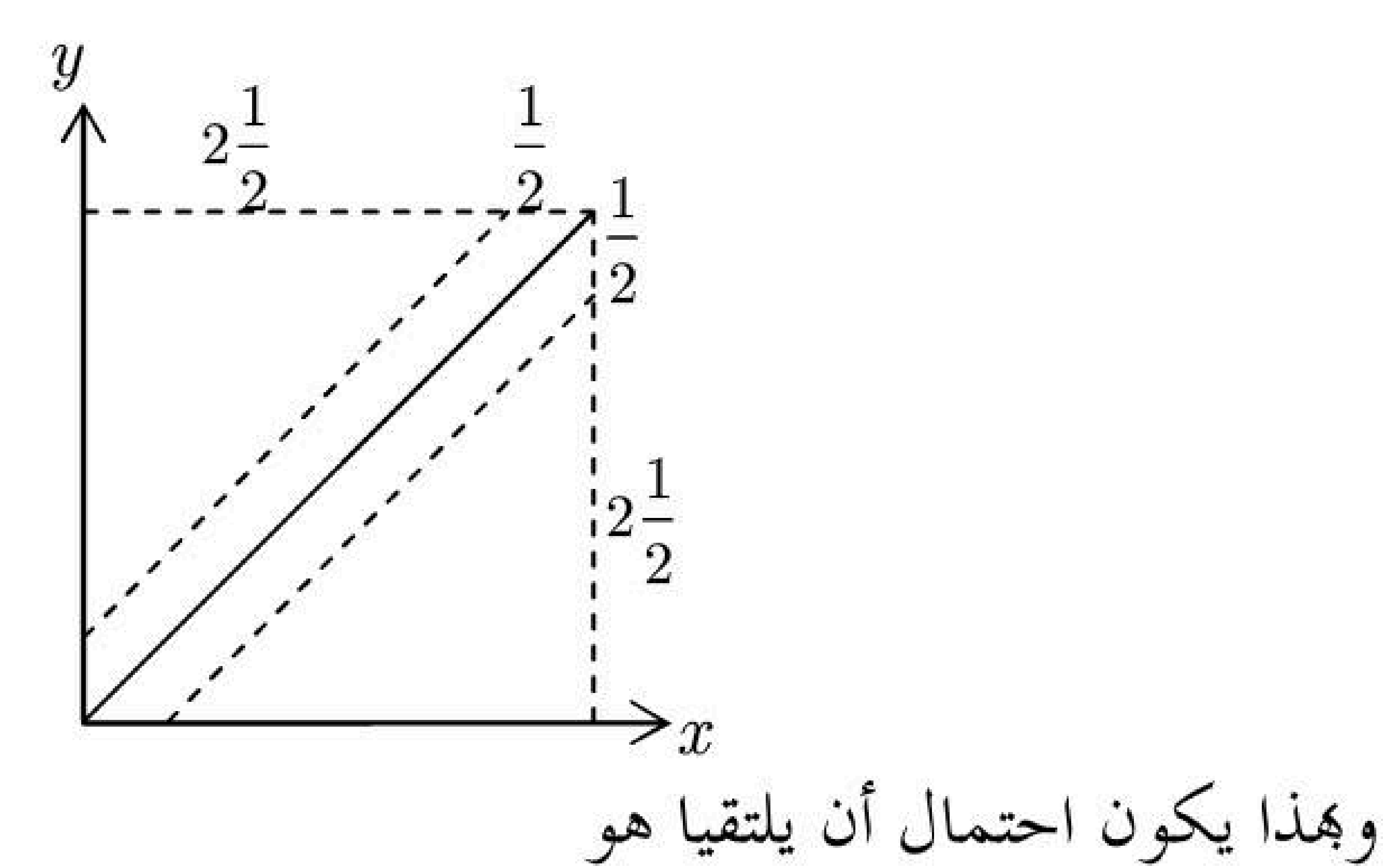
إذن, احتمال أن لا تكفي القطع الثلاث لشراء القميص هو $\frac{13}{44} = \frac{65}{220}$.

وبهذا فإن احتمال أن تكفي القطع الثلاث لشراء القميص هو $\frac{31}{44} = \frac{13}{44} - 1$.

(٢٦) [Aust.MC 1989]اتفق الصديقان أحمد وبدر المشهوران بنسيانهما للمواعيد على أن يلتقيا بعد الظهر في محل دنكن دونات لشرب القهوة. كلاهما نسي وقت اللقاء المتفق عليه ولكن كلاً منهما تذكر أن الموعد هو بين الساعة الثانية والخامسة مساءً. قرر كل منهما الذهاب للموعد بين الساعة الثانية والخامسة مساءً والانتظار نصف ساعة ومن ثم المغادرة إذا لم يحضر الصديق الآخر. ما احتمال أن يلتقي الصديقان في الموعد ؟

الحل

لنفرض أن أحمد وصل عند الساعة $x + 2$وبدر وصل عند الساعة $y + 2$حيث $3 \le x, y \le 0$.وبهذا فإنهما سيتقابلان إذا كان $\left|x - y\right| \le \frac{1}{2}$. أي انهما سيتقابلان في مساحة الشريط المبين في الشكل المرفق



وبهذا يكون احتمال أن يلتقيا هو

$$\frac{11}{36}=\frac{9-\frac{25}{4}}{9}=\frac{3\times 3-2\times\frac{1}{2}\times\left(2\frac{1}{2}\right)\left(2\frac{1}{2}\right)}{3^2}.$$

(٢٧) [Aust.MC 1982] أخذنا 16ورقة لعب مكونة من 4 ملوك, 4 ملكات، 4 شباب, 4 آصات. بعد خلط الأوراق جيداً سحب عصام وهو الصادق دائماً ورقتين على التوالي عشوائياً. ثم صرح "على الأقل إحدى الورقتين هي ملكة". ما احتمال أن تكون كل من الورقتين ملكة ؟

الحل

الاحتمال المطلوب يساوي

$$\frac{\text{عدد طرق اختيار ملكتين من أربع}}{\text{عدد طرق اختيار ورقتين على الأقل واحدة منهما ملكة}}$$

وهذا بدوره يساوي

$$\frac{\text{عدد طرق اختيار ملكتين من أربع}}{\text{عدد طرق اختيار ملكة واحدة + عدد طرق اختيار ملكتين من الأربع}}$$

الآن، عدد طرق اختيار ملكتين من أربع ملكات هو $12 = 3 \times 4$.

ولحساب عدد طرق اختيار ملكة واحدة لاحظ أنه من الممكن أن تكون الملكة هي الورقة الأولى أو الورقة الثانية.ولذا فعدد الطرق هو $96 = 12\times 4 + 12 \times 4$

.إذن, الاحتمال المطلوب هو $\frac{1}{9}=\frac{12}{108}=\frac{12}{12+96}$.

(٢٨) [AMC10A, AMC12A 2002] اختارت ليلى عشوائياً عددين مختلفين من المجموعة $\{1,2,3,4,5\}$ واختارت سعاد عشوائياً عدداً من المجموعة $\{1,2,3,\cdots,10\}$. ما احتمال أن يكون العدد الذي اختارته سعاد أكبر

من مجموع العددين اللذين اختارتهما ليلى ؟

الحل

عدد طرق اختيار عددين من 5هو $10 = C(5,2)$. وعدد طرق اختيار عدد من 10هو 10 .إذن, عدد الطرق الكلية لاختيار الأعداد هو $100 = 10 \times 10$.

الآن, ندرس الحالات التالية لإيجاد عدد الطرق التي يكون فيها العدد الذي اختارته سعاد أكبر من مجموع العددين اللذين اختارتهما ليلى:

- مجموع العددين يساوي 3 : هناك طريقة واحدة لهذا الخيار وهو $(1,2)$ومن ثم تستطيع سعاد اختيار أي عدد من 4إلى 10. عدد الطرق في هذه الحالة هو $7 = 7 \times 1$.
- مجموع العددين يساوي 4 : خيار واحد لليلى هو $(1,3)$وستة خيارات لسعاد هي الأعداد من 5إلى 10. عدد الطرق هنا هو $6 = 6 \times 1$.
- مجموع العددين يساوي 5: خياران لليلى هما $(1,4)$و $(2,3)$. خمسة خيارات لسعاد هي من 6إلى 10. عدد الطرق هنا هو $10 = 5 \times 2$.
- مجموع العددين يساوي 6: خياران لليلى هما $(1,5)$و $(2,4)$وأربعة خيارات لسعاد من 7إلى 10.عدد الطرق هنا هو $8 = 4 \times 2$.
- مجموع العددين يساوي 7: خياران لليلى هما $(2,5)$و $(3,4)$وثلاثة خيارات لسعاد من 8إلى 10.عدد الطرق هنا هو $6 = 3 \times 2$.
- مجموع العددين يساوي 8 : خيار واحد لليلى هو $(3,5)$وخياران لسعاد هما 9 , 10. عدد الطرق هنا هو $2 = 2 \times 1$.
- مجموع العددين يساوي 9: خيار واحد لليلى هو $(4,5)$وخيار واحد لسعاد هو 10.عدد الطرق هنا هو $1 = 1 \times 1$.

إذن, احتمال أن يكون عدد سعاد أكبر من مجموع عددي ليلى هو

$$\frac{7+6+10+8+6+2+1}{100}=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}.$$

(٢٩) [AMC10A, AMC12A 2003] اخترنا عشوائياً قاسماً موجباً للعدد 60. ما احتمال أن يكون هذا القاسم أصغر من 7؟

الحل

لاحظ أولاً أن $60=2^2\times 3\times 5$. ولذا فعدد قواسمه الموجبة يساوي $3\times 2\times 2=12$.

القواسم الموجبة التي أصغر من 7 عددها 6 وهي $1, 2, 3, 4, 5, 6$. إذن, احتمال أن يكون القاسم أصغر من 7 هو $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

(٣٠) [AMC10A 2003] اخترنا نقطة (x,y) عشوائياً داخل المستطيل الذي رؤوسه $(0,0)$, $(0,1)$, $(4,0)$, $(4,1)$. ما احتمال أن يكون $x<y$؟

الحل

مساحة المستطيل هي $4\times 1=4$. المستقيم $y=x$ يقطع المستطيل في النقطتين $(0,0)$ و $(1,1)$. إذن, مساحة المنطقة $x<y$ هي مساحة المثلث الذي رؤوسه $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ وهي $\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$. إذن, احتمال $x<y$ يساوي

$$\frac{\frac{1}{2}}{4}=\frac{1}{8}.$$

(٣١) [AMC10A 2003] ما احتمال أن يقبل عدد من المجموعة $\{1,2,3,\cdots,100\}$ القسمة على 2 ولا يقبل القسمة على 3؟

الحل

عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 2هو $50 = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor$.

عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 2و 3هو عدد الأعداد التي تقبل القسمة على $lcm(2,3) = 6$ وهذا العدد يساوي $16 = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor$.

إذن, عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 2ولا تقبل القسمة على 3هو $34 = 16 - 50$. وبهذا فاحتمال أن يقبل العدد القسمة على 2ولا يقبل القسمة على 3هو $\frac{17}{50} = \frac{34}{100}$.

(٣٢) [AMC10B 2003] يحتوي وعاء على خرزتين من اللون الأحمر وخرزتين من اللون الأخضر. اسحب خرزة من الوعاء واستبدلها بخرزة حمراء بغض النظر عن لون الخرزة المسحوبة. ما احتمال أن تكون جميع الخرزات في الوعاء من اللون الأحمر بعد سحب واستبدال ثلاث خرزات ؟

الحل

لكي تصبح جميع الخرزات من اللون الأحمر بعد ثلاث مرات من السحب والاستبدال فيجب أن نكون قد سحبنا الخرزتين الخضراوين في هذه السحبات الثلاث وهذا الاحتمال هو

$$P(GGR) + P(GRG) + P(RGG)$$
$$= \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{4}{4} + \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{3}{32} + \frac{1}{16} = \frac{9}{32}$$

(٣٣) [AMC10A 2004] اخترنا ثلاث نقاط عشوائياً من النقاط التسع المبينة في الشكل المرفق. إذا كانت احتمالات اختيار النقاط الثلاث جميعها متساوية فما احتمال أن تكون الثلاث نقاط على استقامة واحدة ؟

الحل

عدد طرق اختيار ثلاث نقاط من بين 9 نقاط هو $84 = \dfrac{9\times 8\times 7}{3\times 2} = C(9,3)$.

عدد المستقيمات الممكنة يساوي 8 وهي ثلاثة مستقيمات أفقية وثلاثة مستقيمات رأسية وقطران. إذن, الاحتمال المطلوب هو $\dfrac{2}{21} = \dfrac{8}{84}$.

(٣٤) [AMC10A 2004] رمينا قطعة النقود A ثلاث مرات ورمينا قطعة النقود B أربع مرات. ما احتمال أن يكون عددا الصور التي حصلنا عليها من رمي قطعتي النقود متساويين ؟

الحل

نحصل على عددينمتساويين من الصور إذا كان عدد الصور يساوي 0 أو 1 أو 2 أو 3 .

احتمال الحصول على عدد 0 من الصور هو $\dfrac{1}{128} = C(3,0)\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 C(4,0)\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$

احتمال الحصول على صورة واحدة هو $\dfrac{12}{128} = C(3,1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 C(4,1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$.

احتمال الحصول على صورتين هو $\frac{18}{128} = C(3,2)\left(\frac{1}{2}\right)^3 C(4,2)\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

احتمال الحصول على ثلاث صور هو $\frac{4}{128} = C(3,3)\left(\frac{1}{2}\right)^3 C(4,3)\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

إذن, احتمال الحصول على عددين متساويين من الصور هو

$$\frac{1+12+18+4}{128} = \frac{35}{128}.$$

(٣٥) [AMC10B 2004] رمينا حجري نرد لكل منهما 8 وجوه مرقمة بالأرقام من 1 إلى 8 وسجلنا العددين الظاهرين على الوجهين العلويين. ما احتمال أن يكون حاصل ضرب هذين العددين أكبر من مجموعهما ؟

الحل

لنفرض أن m و n هما العددان الظاهران على الوجهين العلويين. سنجد عدد الأزواج المرتبة (m,n) التي تحقق $mn > m + n$. الآن،

$$\begin{aligned} mn > m + n &\Leftrightarrow mn - m - n > 0 \\ &\Leftrightarrow mn - m - n + 1 > 1 \\ &\Leftrightarrow (m-1)(n-1) > 1 \end{aligned}$$

من الأسهل حساب عدد الأزواج المرتبة (m,n) التي تحقق $(m-1)(n-1) \leq 1$

.

بما أن $m-1$ و $n-1$ هما عددان صحيحان يحققان $0 \leq m-1$ و $n-1 \leq 7$

فإن $(m-1)(n-1) = 0$ أو $(m-1)(n-1) = 1$.

الآن, $(m-1)(n-1) = 0$ إذا وفقط إذا كان $m = 1$ أو $n = 1$. عدد الازواج المرتبة $(1,n)$ يساوي 8 وعدد الأزواج المرتبة $(m,1)$ يساوي 8 وبطرح الزوج المرتب $(1,1)$ الذي تكرر مرتين نجد أن عدد هذه الازواج هو

$.8+8-1=15$

أيضاً, $(m-1)(n-1)=1$ إذا وفقط إذا كان $m=n=2$. وهذا يعطينا زوجاً مرتباً واحداً هو $(2,2)$. إذن, عدد الأزواج المرتبة (m,n) التي تحقق $(m-1)(n-1)>1$ هو $64-(15+1)=48$. وبهذا فالاحتمال المطلوب هو $.\frac{48}{64}=\frac{3}{4}$

(٣٦) [AMC10A 2005] علمنا ثلاث بلاطات بالعلامة X وعلمنا بلاطتين بالعلامة O. وضعنا الخمس بلاطات عشوائياً في صف. ما احتمال أن يكون الترتيب هو $XOXOX$ ؟

الحل

عدد ترتيبات الخمس بلاطات (3 معلمة بالعلامة X و 2 معلمتان بالعلامة O) هو $\frac{5!}{2!\times 3!}=10$. يوجد فقط ترتيب واحد يقرأ $XOXOX$. إذن, الاحتمال هو $.\frac{1}{10}$

(٣٧) [AMC10B 2005] حجر نرد ذو ستة وجوه مرقمة بالأرقام $1,1,2,2,3,3$ وحجر نرد آخر ذو ستة وجوه مرقمة بالأرقام $4,4,5,5,6,6$. رمينا حجري النرد وسجلنا العددين الظاهرين على الوجهين العلويين. ما احتمال أن يكون مجموع هذين العددين فردياً ؟

الحل

لكي نحصل على مجموع فردي يجب أن يكون أحد العددين فردياً والآخر زوجياً. إذن, لدينا حالتان.

- العدد الظاهر على الحجر الأول فردي وعلى الثاني زوجي:

الاحتمال في هذه الحالة هو $\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$.

- العدد الظاهر على الحجر الأول زوجي وعلى الثاني فردي:

الاحتمال في هذه الحالة هو $\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

إذن, الاحتمال المطلوب هو $\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$.

(٣٨) [AMC10B 2005] رمينا 12 حجر نرد مرة واحدة.ما احتمال أن يكون حاصل ضرب الأعداد الظاهرة على الوجوه العلوية عدداً أولياً ؟

الحل

لكي يكون حاصل ضرب الأعداد اولياً فيجب أن يظهر العدد 1 على وجوه 11 حجراً وعدد أولي على وجه الحجر الثاني عشر.يوجد $C(12,1)=12$ طريقة لاختيار الحجر الذي يظهر عليه عدد أولي. وعدد الأعداد الأولية هو 3 على الحجر فاحتمال ظهور عدد أولي هو $\frac{1}{2}$ واحتمال ظهور العدد 1 على كل من الأحجار هو $\frac{1}{6}$. إذن الاحتمال المطلوب هو $\left(\frac{1}{6}\right)^{10}=12\times\left(\frac{1}{6}\right)^{11}\times\frac{1}{2}$.

(٣٩) [AMC10B, AMC12B 2005] تحتوي محفظة على 8 قطع نقود: قطعتان من كل من الفئات: 1 ريـــال, 5 ريالات, 10 ريالات, 20 ريالاً. سحبنا قطعتي نقود عشوائياً من المحفظة. ما احتمال أن يكون مجموعهما 20 ريالاً فأكثر ؟

الحل

عدد طرق اختيار قطعتين من 8 قطع هو $28 = \frac{8 \times 7}{2} = C(8,2)$.

نحصل على مجموع 20 ريالاً فأكثر في الحالات التالية:

- قطعة من فئة العشرين والقطعة الأخرى من أي فئة أخرى: عدد الطرق هنا هو 12 .
- قطعتان من فئة العشرين: طريقة واحدة.
- قطعتان من فئة العشرة: طريقة واحدة.

إذن, الاحتمال هو $\frac{1}{2} = \frac{14}{28} = \frac{12+1+1}{28}$.

> (٤٠) [AMC10B 2005] وضعنا 40 ورقة متماثلة في كيس بحيث يكون كل من الأعداد $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$ مكتوباً على أربع من هذه الورقات. سحبنا أربع ورقات عشوائياً من الكيس دون إرجاع. لنفرض أن p هو احتمال أن تحمل الأوراق الأربع العدد نفسه وأن q هو احتمال أن تحمل ورقتان العدد a وأن تحمل الورقتان الأخريان العدد b حيث $a \neq b$. ما قيمة $\frac{q}{p}$ ؟

الحل

عدد طرق سحب أربع أوراق من الكيس دون إرجاع هو $37 \times 38 \times 39 \times 40$.

لحساب الاحتمال p لاحظ أن عدد طرق معرفة العدد المكتوب عل الورقة المسحوبة هو 10 وهناك $4!$ طريقة لسحب الأربع أوراق التي تحمل هذه العدد. إذن, الاحتمال p هو $p = \frac{10 \times 4!}{40 \times 39 \times 38 \times 37}$.

ولحساب الاحتمال q لاحظ أن عدد طرق اختيار عددين مختلفين هو $C(10,2)=45$.

وعدد طرق ترتيب سحب الأوراق المختلفة هو $C(4,2)=6$.

ويوجد لكل من هذه الترتيبات عدد من الطرق $3\times4\times3\times4$ لاختيار الأربع ورقات. إذن، $q=\dfrac{45\times6\times4^2\times3^2}{40\times39\times38\times37}$.

وبهذا فإن $\dfrac{q}{p}=\dfrac{45\times6\times4^2\times3^2}{10\times4!}=162$.

(٤١) [MAΘ 1991] جد احتمال أن يكون ملك السباتي بجانب الشاب القلبي في مجموعة من ورق اللعب الاعتيادية التي عددها 52 ورقة.

الحل

عدد طرق ترتيب مجموعة ورق اللعب هو $52!$. ولإيجاد عدد طرق ترتيب المجموعة بحيث تكون ورقتان بجانب بعضهما البعض نفترض أن الورقتين هما ورقة واحدة وبهذا نحصل على $51!$ طريقة لترتيب 51 ورقة, كما أنه يمكن ترتيب الورقتين بجانب بعضهما البعض بطريقتين. إذن, الاحتمال هو $\dfrac{2\times51!}{52!}=\dfrac{1}{26}$.

(٤٢) [AHSME 1970] اخترنا عدداً عشوائياً من بين جميع الأعداد المكونة من خمس مراتب والتي مجموع مراتبها يساوي 43 . ما احتمال أن يقبل العدد القسمة على 11؟

الحل

لاحظ أن الأعداد المكونة من 5 مراتب ومجموع مراتبها 43 هي الأعداد التي نحصل عليها باستخدام أربع مراتب كل منها 9 ومرتبة 7 أو استخدام ثلاث مراتب كل

منها 9 ومرتبتان كل منهما 8 .عدد ترتيبات النمط الأول هو $C(5,1) = 5$ وعدد ترتيبات النمط الثاني هو $C(5,2) = 10$.أي لدينا 15عدداً، عدد مراتب كل منها يساوي 5ومجموع هذه المراتب يساوي 43 . وبالاستعانة باختبار قابلية القسمة على 11نجد أن ثلاثة أعداد فقط من بينها تقبل القسمة على 11وهي 98989, 99979 , 97999 . إذن الاحتمال هو $\frac{1}{5} = \frac{3}{15}$.

(٤٣) [Mandelbrot #3] في إحدى الجزر البعيدة يوجد نوعان من البشر هما الصادقون دائماً والكاذبون دائماً. $\frac{1}{5}$سكان الجزيرة كاذبون وباقي السكان صادقون. سأل صاحب مركب ثلاثة أشخاص من سكان الجزيرة "هل الجو ماطر ؟" فكانت إجاباتهم جميعاً "نعم". ما احتمال أن يكون الجو هو بالفعل ماطراً ؟

الحل

.بما أن إجابات الثلاث أشخاص هي نعم فإما أن يكون الثلاثة أشخاص صادقين أو أن يكونوا كاذبين. ولذا إذا كانوا جميعاً صادقين فإن الجو ماطر. ولهذا فالاحتمال المطلوب هو احتمال أن يكون الثلاثة أشخاص صادقين مقسوماً على احتمال أن تكون إجابات الثلاثة أشخاص هي الإجابات نفسها. أي

$$P = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^3}{\left(\frac{4}{5}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^3} = \frac{64}{65}$$

حل آخر: يمكن استخدام مبرهنة بيز لحل هذه المسألة بفرض أن B هو الحدث "الأشخاص الثلاثة أعطوا الإجابة نفسها" والحدث A "الأشخاص الثلاثة صادقون"

ويكون المطلوب هو $P(A \mid B)$. الآن،

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A')P(A')}$$

$$= \frac{1 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3}{1 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3 + 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3} = \frac{64}{65}$$

(٤٤) [AHSME 1987] نجزئ 2.5 إلى عددين حقيقيين غير سالبين x و y عشوائياً وبانتظام. على سبيل المثال، إلى 2.143 و 0.357 أو إلى $\sqrt{3}$ و $2.5 - \sqrt{3}$. بعد ذلك نقرب كلاً من العددين إلى أقرب عدد صحيح، على سبيل المثال، إلى 2 و 0 في الحالة الأولى و إلى 2 و 1 في الحالة الثانية. ما احتمال أن يكون مجموع العددين الصحيحين يساوي 3؟

الحل

نقوم برسم x و y على خط الأعداد , مرة تصاعدياً ومرة تنازلياً كما هو مبين أدناه

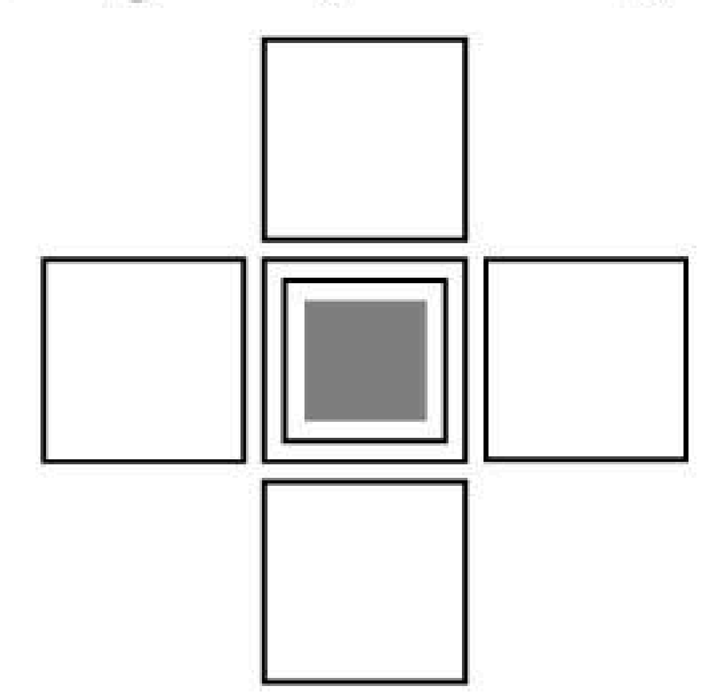
x	0	0.5	1.0	1.5	2	2.5
y	2.5	2	1.5	1	0.5	0

الأجزاء الثخينة تبين الفترات التي تم بها تقريب الأعداد. عندئذ, يكون المجموع يساوي 3 فقط في الفترات التي يتم فيها تقريب كل من x و y وعددها 4 . وبهذا فإن احتمال أن يكون مجموع العددين الصحيحين يساوي 3 هو $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$.

(٤٥) [MAΘ 1987]أراد سليمان تغطية باب موقد مترله بشبك فصنع شبكاً مكوناً من مربعات مفتوحة طول ضلع كل منها 5ميلمتر وكل من هذه المربعات محاط بإطار من السلك قطره 1ميلمتر. تطايرت شرارة قطرها 2 ميلمتر من النار واتجهت مباشرة نحو الشبك. ما احتمال أن تخطئ هذه الشرارة إطار السلك ؟

الحل

الشكل المرفق يبين خمسة من المربعات المفتوحة من الشبك



بما أن نصف قطر الشرارة هو 1ميلمتر فإن مركزها يجب أن يبعد على الأقل 1 ميلمتر عن سلك الإطار لكي تخطئ إطار السلك. ولهذا فإن مركز الشرارة يجب أن يكون داخل المنطقة المظللة التي هي عبارة عن مربع طول ضلعه 3 ميلمتر (لأن المركز يجب أن يبعد 1ميلمتر عن كل من الإطارات).وبهذا فالمساحة المطلوبة هي 9 ميلمتر مربع.

الآن, المساحة الكلية ليست فقط مساحة المربع (الفتحة) بل تحتوي المنطقة أيضاً التي تبعد $\frac{1}{2}$ميلمتر من الجوانب (لأن نصف قطر الشرارة هو 1ميلمتر ويمكن أن تقع الشرارة على السلك نفسه). إذن، مساحة المنطقة الكلية هي $(5+1)^2 = 36$ ميلمتر مربع ويكون الاحتمال هو $\frac{1}{4} = \frac{9}{36}$.

(٤٦) [MAΘ 2011] يمتلك بهاء حجر نرد ثماني الوجوه مرقمة بالأعداد من 1 إلى 8. رمى بهاء حجر النرد ثلاث مرات. ما احتمال أن يكون مجموع الأعداد الظاهرة على الوجوه يساوي 22؟

الحل

عدد عناصر فضاء العينة هو $8 \times 8 \times 8 = 512$. نستطيع الحصول على مجموع 22 بطريقتين: إما عددان كل منهما يساوي 7 وعدد يساوي 8 وإما عددان كل منهما يساوي 8 وعدد يساوي 6.

وهذه الأعداد هي $877, 787, 778, 886, 868, 688$ وعددها 6، إذن، الاحتمال هو $\frac{6}{512} = \frac{3}{256}$.

(٤٧) [MAΘ 2011] رمى حسام حجري نرد وجوه كل منهما مرقمة بالأعداد من 1 إلى 6 مرة واحدة. إذا كان مجموع العددين الظاهرين يساوي 8. فما احتمال أن يكون العددان الظاهران متساويين ؟

الحل

لنفرض أن A هو الحدث "المجموع يساوي 8" و B هو الحدث "العددان متساويان". المطلوب هو إيجاد $P(B \mid A)$. الآن،

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{5}.$$

(٤٨) [MAΘ 2010] سحبنا ورقة من مجموعة ورق اللعب الاعتيادية (52 ورقة) ورمينا حجر نرد. ما احتمال ظهور العدد 3 على الأقل مرة واحدة ؟

الحل

احتمال عدم الحصول على العدد 3 من ورق اللعب هو $\frac{12}{13} = \frac{48}{52}$ واحتمال عدم الحصول على العدد 3 من رمي حجر النرد هو $\frac{5}{6}$. إذن, احتمال عدم الحصول على العدد 3 هو $\frac{10}{13} = \frac{12}{13} \times \frac{5}{6}$. وبهذا يكون احتمال الحصول على العدد 3 على الأقل مرة واحدة هو $1 - \frac{10}{13} = \frac{3}{13}$.

(٤٩) [MAΘ 2010] اخترنا عددين حقيقيين x و y حيث $0 \le x \le 2$ و $0 \le y \le 2$ عشوائياً. ما احتمال أن يكون مجموع مربعيهما أكبر من 2؟

الحل

العددان يقعان في المربع الذي طول ضلعه يساوي 2. المنطقة R تمثل المنطقة التي يكون فيها مجموع المربعين أكبر من 2 والمنطقة S وهي عبارة عن ربع دائرة نصف قطرها $\sqrt{2}$ وهي المنطقة التي يكون فيها مجموع المربعين أصغر من 2. وبهذا فالاحتمال المطلوب يكون $\frac{\text{مساحة المنطقة } R}{\text{مساحة المربع}}$. الآن, مساحة المنطقة R هي $4 - \frac{1}{4}\pi\left(\sqrt{2}\right)^2 = 4 - \frac{\pi}{2}$. إذن, الاحتمال هو $\frac{4 - \frac{\pi}{2}}{4} = \frac{8 - \pi}{8}$.

y S R S O $\sqrt{2}$ 2 x

(٥٠) [MAΘ 2007] لنفرض أن A , B , C ثلاثة أحداث مستقلة احتمالات وقوعها هي 1, 0.5, 0.7 على التوالي. ما احتمال وقوع اثنين منها بالضبط ؟

الحل

لاحظ أن $P(A) = 1$ يعني أن الحدث A مؤكد وقوعه. ولذا فالاحتمال المطلوب الآن هو احتمال وقوع (B وعدم وقوع C) أو (وقوع C وعدم وقوع B). هذا الاحتمال هو

$$\begin{aligned} P(B \cap C') + P(B' \cap C) &= P(B)P(C') + P(B')P(C) \\ &= 0.5 \times 0.3 + 0.5 \times 0.7 = 0.15 + 0.35 = 0.5 \end{aligned}$$

(٥١) [MAΘ 2007] اخترنا عددين حقيقيين x و y عشوائياً في الفترة $[-1,1]$. ما احتمال أن يكون $\left|x + y\right| > 0.5$ ؟

الحل

لاحظ أولاً أن $\left|x + y\right| > 0.5$ إذا وفقط كان $x + y > 0.5$ أو $x + y < -0.5$. ولهذا في المربع الذي رؤوسه $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$, $(-1,1)$ تكون المساحة المطلوبة هي مساحة المنطقتين الواقعتين أعلى المستقيم $x + y = 0.5$ وأسفل المستقيم $x + y = -0.5$. كل من هاتين المنطقتين مثلث متساوي الساقين, ارتفاعه يساوي قاعدته وكل منهما يساوي 1.5. إذن, مجموع مساحتيهما هو $2 \times \frac{1}{2} \times 1.5 \times 1.5 = 2.25$. ويكون الاحتمال المطلوب هو $\frac{2.25}{4} = \frac{9}{16}$.

(٥٢) [Pascal 2009] رمى كل من أحمد وبدر حجري نرد مرة واحدة. يكون

أحمد هو الرابح إذا كان الفرق بين العددين الظاهرين يساوي 1. ما احتمال أن يربح أحمد ؟

الحل

الأزواج المرتبة التي الفرق بينها 1هي

$$(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(2,1),(3,2),(4,3),(5,4),(6,5)$$

وعددها 10. إذن, الاحتمال هو $\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$.

(٥٣) [MAΘ 2005] اخترنا عددين حقيقيين عشوائياً من الفترة $[-20,10]$. ما احتمال أن يكون حاصل ضربهما أكبر من الصفر ؟

الحل

لنفرض أن العددين هما xو y. عندئذ, يكون $xy>0$ إذا وفقط إذا كان $-20\le x,y<0$ أو $0<x,y<10$. إذن, الاحتمال هو

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{9}.$$

(٥٤) [MAΘ 2005] تقابل أربعة أصدقاء لتناول وجبة الغداء في أحد مطاعم الرياض. أثناء تناولهم للغداء وضع كل منهم مفتاح سيارته وسط المائدة وعند مغادرتهم للمطعم تناول كل منهم أحد المفاتيح عشوائياً. ما احتمال أن يكون على الأقل أحدهم أخذ مفتاح سيارته ؟

الحل

احتمال أن يأخذ واحد على الأقل مفتاح سيارته هو احتمال أن واحداً أو اثنين أو أربعة أشخاص أخذوا مفاتيح سياراتهم.

- شخص واحد يأخذ مفتاح سيارته: عدد طرق اختيار الشخص لمفتاحه هو

4وعدد طرق اختيار الثلاثة اشخاص الآخرين لمفاتيح بعضهم البعض هو 2 . إذن, عدد الطرق في هذه الحالة هو $8 = 2 \times 4$.

- شخصان يأخذ كل منهما مفتاحسيارته: عدد الطرق هنا هو $C(4,2) = 6$.

- أربعة أشخاص يأخذ كل منهم مفتاح سيارته: توجد طريقة واحدة.

إذن, الاحتمال هو $\frac{5}{8} = \frac{15}{24} = \frac{8+6+1}{4!}$.

(٥٥) [مسألة مونتي هول Monty Hall Problem]

مونتي هول هو مقدم برنامج مسابقات في إحدى قنوات التلفاز حيث قيمة الجائزة للمتسابق الرابح هي سيارة جديدة. قوانين المسابقة هي على النحو التالي: توجد ثلاثة أبواب مقفلة مرقمة بالأرقام 1, 2, 3وراء أحدها سيارة جديدة ووراء كل من البابين الآخرين ماعز. يختار المتسابق أحد الأبواب الذي يعتقد أن خلفه السيارة. بعد ذلك يفتح مقدم البرنامج مونتي هول أحد البابين الآخرين فتظهر ماعز وراء الباب ومن ثم يسأل المتسابق ما إذا كان يرغب بتغيير الباب الذي اختاره أم يبقى على خياره. هل يغير المتسابق الباب وما احتمال أن يكسب السيارة ؟

الحل

نفرض دون التأثير على العمومية أن المتسابق اختار الباب رقم 1 بداية. إذا كانت السيارة خلف الباب رقم 2فيكون الباب الذي فتحه مونتي هول هو الباب رقم 3 (خلفه ماعز), أما إذا كانت السيارة خلف الباب رقم 3فيكون الباب الذي فتحه

مونتي هول هو الباب رقم 2.

لاحظ أنه لو كانت السيارة خلف الباب رقم 1فيكون لمونتي هول خيار فتح أي من البابين 2أو 3. ولهذا دعنا نفترض أن مونتي هول يختار أحدهما عشوائياً (على الرغم من أن هذا الخيار ليس عشوائياًفبإعادة التجربة مرات عديدة فإن احتمال ربح المتسابق بين تبديل الباب الذي اختاره أو عدم تبديل الباب يكون نفسه). إذن, في المتوسط, يكون احتمال أن تكون ماعز خلف الباب رقم 2يساوي احتمال أن تكون ماعز خلف الباب رقم 3ويساوي كل منهما $\frac{1}{2}$.

نفرض الآن أن Aهو الحدث "مونتي هول فتح الباب رقم 2". إذن, $P(A) = \frac{1}{2}$

. لنفرض أن Bهو الحدث "السيارة خلف الباب رقم 3". إذن, $P(B) = \frac{1}{3}$.

لاحظ أيضاً أن $P(A \mid B) = 1$. ولكننا نرغب في حساب $P(B \mid A)$. الآن,

$$P(A)P(B \mid A) = P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B)$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(B)P(A \mid B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

إذن, استبدال المتسابق للباب يزيد من احتمال أن يكسب السيارة. ولتأكيد ما توصلنا إليه نفرض أن Cهو الحدث "السيارة خلف الباب رقم 1". لاحظ أن $P(C) = P(B) = \frac{1}{3}$ولكن $P(A \mid C) = \frac{1}{2}$وليس 1.إذن,

$$P(C \mid A) = \frac{P(C)P(A \mid C)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

(٥٦) وعاء يحتوي على 3 خرزات حمراء و n خرزة زرقاء. إذا كان احتمال سحب خرزتين زرقاوين يساوي احتمال سحب خرزتين من لونين مختلفين فجد قيمة n.

الحل

احتمال سحب خرزتين زرقاوين من الوعاء هو $\dfrac{C(n,2)}{C(n+3,2)}$.

واحتمال سحب خرزتين مختلفتي اللون هو $\dfrac{C(3,1)C(n,1)}{C(n+3,2)}$.

بما أن الاحتمالين متساويان فإن $C(n,2) = C(3,1)C(n,1)$. من ذلك نجد أن

$$\begin{aligned}
\frac{n(n-1)}{2} &= 3n \\
n^2 - n &= 6n \\
n^7 - 7n &= 0 \\
n(n-7) &= 0
\end{aligned}$$

إذن, $n = 7$ لأن $n \neq 0$.

(٥٧) [AHSME 1994] كيس من الفشار (حب الذرة) ثلثا حباته من اللون الأبيض والثلث الباقي من اللون الأصفر. عند وضع حبات الذرة على النار لعمل الفشار, نصف الحبات البيض ستتفتق (تفرقع) وثلثا الحبات الصفراء ستتفتق. اخترنا حبة ذرة عشوائياً من الكيس ووضعناها على النار فتفتقت. ما احتمال أن تكون من الذرة البيضاء اللون ؟

الحل

لنفرض أن W هو حدث "حبة الذرة بيضاء" وأن S هو حدث "حبة الذرة تفتقت". إذن, المطلوب هو $P(W \mid S)$. الآن, $P(W \mid S) = \dfrac{P(W \cap S)}{P(S)}$ حيث

$$P(S) = P(S \mid W)P(W) + P(S \mid W')P(W') = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$

إذن, $P(W \mid S) = \dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}{\frac{5}{9}} = \dfrac{3}{5}$.

(٥٨) لتكن $S = \{1,2,\cdots,10\}$ ولتكن A مجموعة جزئية من S عدد عناصرها يساوي 4. اخرتنا عشوائياً مجموعة جزئية B من S مكونة من 4 عناصر. ما احتمال أن تكون المجموعتان A و B منفصلتين ؟

الحل

لاحظ أن $B \cap A = \varnothing$ إذا وفقط إذا كان $B \subseteq A'$. الآن,عدد طرق اختيار مجموعة مكونة من 4 عناصر من مجموعة مكونة من 10 هو $C(10,4) = 210$.

عدد طرق اختيار مجموعة مكونة من 4 عناصر من مجموعة مكونة من 6 عناصر (عدد عناصر A') هو $C(6,4) = 15$.

إذن, الاحتمال المطلوب هو $\dfrac{15}{210} = \dfrac{1}{14}$.

(٥٩) [AIME 1989] ألقينا قطعة نقود خمس مرات. إذا كان احتمال الحصول على صورة واحدة فقط ليس صفراً ويساوي احتمال الحصول على صورتين فقط فما احتمال الحصول على ثلاث صور فقط ؟

الحل

ليكن p هو احتمال الحصول على صورة عند إلقاء قطعة النقود مرة واحدة. بعد إلقاء قطعة النقود 5 مرات فإن احتمال الحصول على صورة واحدة هو $C(5,1)pq^4$ واحتمال الحصول على صورتين هو $C(5,2)p^2q^3$ حيث $q = 1 - p$

. الآن

$$\begin{aligned} C(5,1)pq^4 &= C(5,2)p^2q^3 \\ 5pq^4 &= 10p^2q^3 \\ q &= 2p \\ 1-p &= 2p \\ p &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

إذن, احتمال الحصول على ثلاث صور هو

$$.\, C(5,3)p^3q^2 = 10\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243}$$

(٦٠) [AHSME 1997] حجرا نرد كل منهما مكون من ستة وجوه. وجوه أحدهما مرقمة بالأرقام $1,2,3,3,5,6$ ووجوه الآخر مرقمة بالأرقام $1,2,4,4,5,6$. ألقينا حجري النرد مرة واحدة وسجلنا مجموع العددين الظاهرين. ما احتمال أن يكون هذا المجموع عدداً فردياً ؟

الحل

يكون المجموع عدداً فردياً إذا وفقط إذا كان العدد الظاهر على أحدهما فردياً والعدد الظاهر على الثاني زوجياً. وبهذا فالاحتمال هو

$$.\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

(٦١) [MAΘ 1992] يلعب فريقان عدداً من المباريات ضد بعضهما البعض حتى يكسب أحدهما أربع مباريات وبعدها يتوقفان. إذا كان احتمال أن يكسب أحد الفريقين مساوياًلاحتمال أن يكسب الفريق الآخر فما احتمال أن يتوقفا بعد 6 مباريات ؟

الحل

لكي يتوقف اللعب بعد 6 مباريات يجب أن يكسب أحد الفريقين 3 مباريات من أول 5 مباريات ويكسب المباراة الأخيرة. عدد طرق اختيار الفريق يساوي 2 وعدد طرق كسب ثلاث مباريات من 5 مباريات هو $C(5,3) = 10$. إذن, عدد الطرق التي يكسب بها أحد الفريقين 4 مباريات هو $2 \times 10 = 20$. الآن, كل من المباريات الست بها مخرجان ربح أو خسارة. فلذا عدد الطرق هو $2^6 = 64$. وبهذا يكون الاحتمال المطلوب هو $\frac{20}{64} = \frac{5}{16}$.

(٦٢) [MAΘ 1991] اخترنا نقطة P, عشوائياً من القطعة AB حيث M هي منتصف AB. ما احتمال إمكانية تكوين مثلث من القطع AP , PB , AM؟

الحل

نفرض (دون المساس بالعمومية) أن $AB = 2$. عندئذ, $AM = 1$. من الواضح أن AP أو PB أكبر من أو يساوي AM. لنفرض أن AP هو الضلع الأكبر. لإنشاء مثلث نحتاج أن يكون $PB + AM > AP$. لنفرض أن $BP = x$ حيث $x \leq 1$ (لأن $BP \leq AP$). عندئذ, $x + 1 > 2 - x$. أي أنه لكي نستطيع إنشاء مثلث فإنه يجب أن يكون $x > \frac{1}{2}$. ومن ثم فالاحتمال المطلوب هو طول الفترة $1 > x \geq \frac{1}{2}$ مقسوماً على طول الفترة $0 \leq x \leq 1$. أي $\frac{1}{2}$.

مسائل غير محلولة

(١) سحبنا خرزة عشوائياً من كيس يحتوي على 3 خرزات خضراء و 4 خرزات صفراء و 5 خرزات زرقاء. ما احتمال أن يكون لون الخرزة أخضر أو أصفر ؟

(أ) $\frac{5}{12}$ (ب) $\frac{7}{12}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{11}{12}$

(٢) في لعبة رمي السهم يتكون الهدف من لوح دائري مقسم إلى 36 قطاعاً متماثلة مرقمة بالأعداد من 1إلى 36. رمى وسيم سهماً على اللوح. ما احتمال أن يقع السهم على قطاع رقمه مضاعف للعدد 4أو للعدد 6؟

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{3}{4}$

(٣) يستطيع أحمد إصابة الهدف الدائري أثناء تدريبه على إطلاق النار ولكنه يصيب مركز الهدف مرتين من كل خمس رميات. أطلق أحمد النار على الهدف ثلاث مرات. ما احتمال أن يصيب مركز الهدف في الرميتين الأولى والثانية ويخطئ في الرمية الثالثة ؟

(أ) $\frac{7}{125}$ (ب) $\frac{8}{125}$ (ج) $\frac{11}{125}$ (د) $\frac{12}{125}$

(٤) سلة تحتوي على 12بيضة, 4 بيضات لونها أبيض والباقي لونها بني. اختار سعيد ثلاث بيضات عشوائياً من السلة. ما احتمال أن تكون جميعها من اللون البني ؟

(أ) $\frac{1}{5}$ (ب) $\frac{13}{55}$ (ج) $\frac{14}{55}$ (د) $\frac{17}{55}$

(٥) يحتوي الوعاء Aعلى 3 خرزات حمراء وخرزتين صفراوين ويحتوي الوعاء

Bعلى خرزة واحدة حمراء وأربع خرزات صفراء. اخترنا وعاءً عشوائياً برمي قطعة نقود ثم سحبنا خرزة من الوعاء. ما احتمال أن تكون الخرزة صفراء ؟

(أ) $\frac{1}{5}$ (ب) $\frac{2}{5}$ (ج) $\frac{3}{5}$ (د) $\frac{4}{5}$

(٦) مصنع لإنتاج علب المرطبات يحتوي على خطي إنتاج، الخط A ينتج 40% من علب المرطبات والخط B ينتج الباقي. 5%من إنتاج الخط A يكون تالفاً و 2%من إنتاج الخط B يكون تالفاً.ما احتمال أن تكون علبة مرطبات تالفة ؟

(أ) $\frac{1}{125}$ (ب) $\frac{2}{125}$ (ج) $\frac{3}{125}$ (د) $\frac{4}{125}$

(٧) يحتوي كيس على 7خرزات صفراء و n خرزة بيضاء. إذا كان احتمال سحب خرزتين صفراوين واحدة بعد الأخرى دون إحلال هو $\frac{3}{13}$فما عدد الخرزات البيضاء ؟

(أ) 7 (ب) 8 (ج) 9 (د) 10

(٨) اختبار متعدد الخيارات مكون من 5أسئلة، كل سؤال له أربع إجابات واحدة فقط منها صائبة. جلس محمد لأخذ الاختبار دون تحضير مسبق حيث اعتمد كلياً على التخمين. إذا كانت النسبة المطلوبة للنجاح هي 60%فما احتمال نجاح محمد في الاختبار ؟

(أ) 0.052 (ب) 0.068 (ج) 0.072 (د) 0.088

(٩) وضعنا قطعتي نقود في كيس, إحداهما قطعة نقود اعتيادية والأخرى عليها صورتان. سحبنا قطعة عشوائياً دون الإعلان عن ماهيتها ثم ألقيناها وكان

المخرج هو "صورة". ما احتمال أن تكون القطعة التي سحبناها هي ذات الصورتين ؟

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{4}{5}$

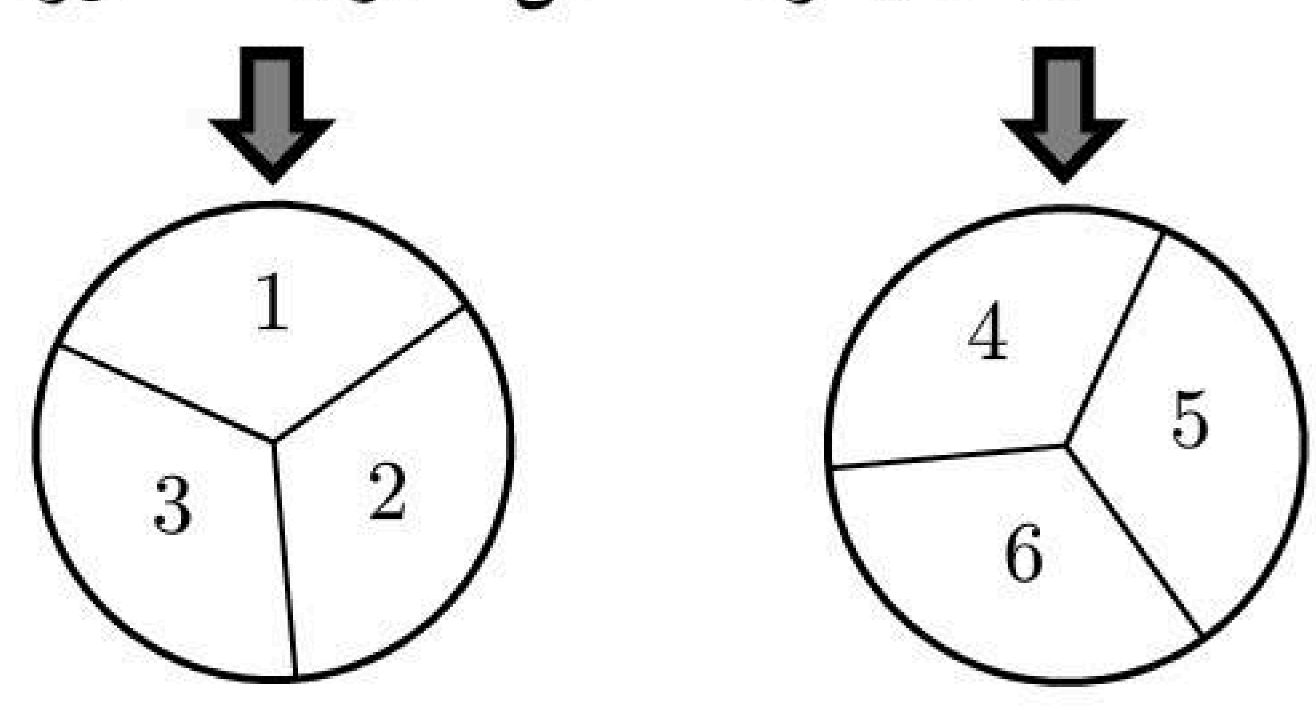
(١٠) أعطيت مسألة رياضيات إلى كل من أحمد و بدر و سعيد. إذا كان احتمال أن يستطيع أحمد حل المسألة هو $\frac{3}{5}$واحتمال أن يكون بإمكان بدر حل المسألة هو $\frac{2}{3}$واحتمال أنيكون بإمكان سعيد حل المسألة هو $\frac{1}{2}$فما احتمال أن يستطيع على الأقل واحد منهم حل المسألة ؟

(أ) $\frac{13}{15}$ (ب) $\frac{14}{15}$ (ج) $\frac{15}{16}$ (د) $\frac{16}{17}$

(١١) ستة أشخاص بينهم ثلاثة أصدقاء A , B , C. أردنا تجليس الأشخاص على ستة مقاعد في صف واحد. إذا أصر الثلاثة أصدقاء الجلوس بجانب بعضهم البعض فما احتمال إنجاز ذلك ؟

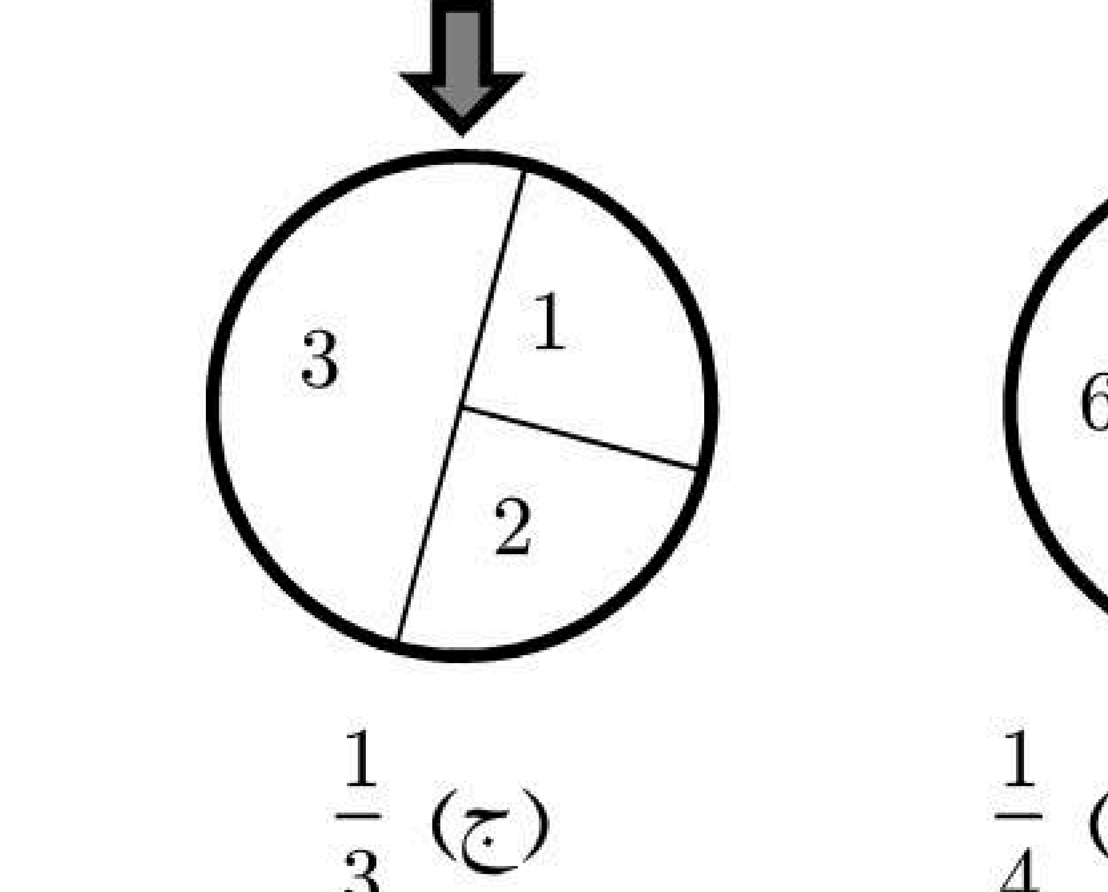
(أ) $\frac{1}{5}$ (ب) $\frac{2}{5}$ (ج) $\frac{3}{5}$ (د) $\frac{4}{5}$

(١٢) [AJHSME 1991] قسمنا كلاً من الدولابين في الشكل المرفق إلى ثلاثة أقسام متساوية. بعد تدوير الدولابين وتوقفهما يتم أخذ العددين عند المؤشر وضربهما. ما احتمال أن يكون حاصل الضرب هذا زوجياً ؟



(أ) $\frac{5}{9}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) $\frac{7}{9}$ (د) $\frac{8}{9}$

(١٣) [AJHSME 1994] قمنا بتدوير الدولابين في الشكل المرفق ثم جمعنا العددين اللذين يظهران عند المؤشر بعد توقف الدولابين. ما احتمال أن يكون هذا المجموع زوجياً ؟



(أ) $\frac{1}{6}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{5}{12}$

(١٤) [AMC8 2000] رمى كمال قطعة نقود واحدة ورمى إحسان قطعتي نقود. ما احتمال حصول إحسان على العددنفسه من الصور التي يحصل عليها كمال ؟

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{3}{8}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{2}{3}$

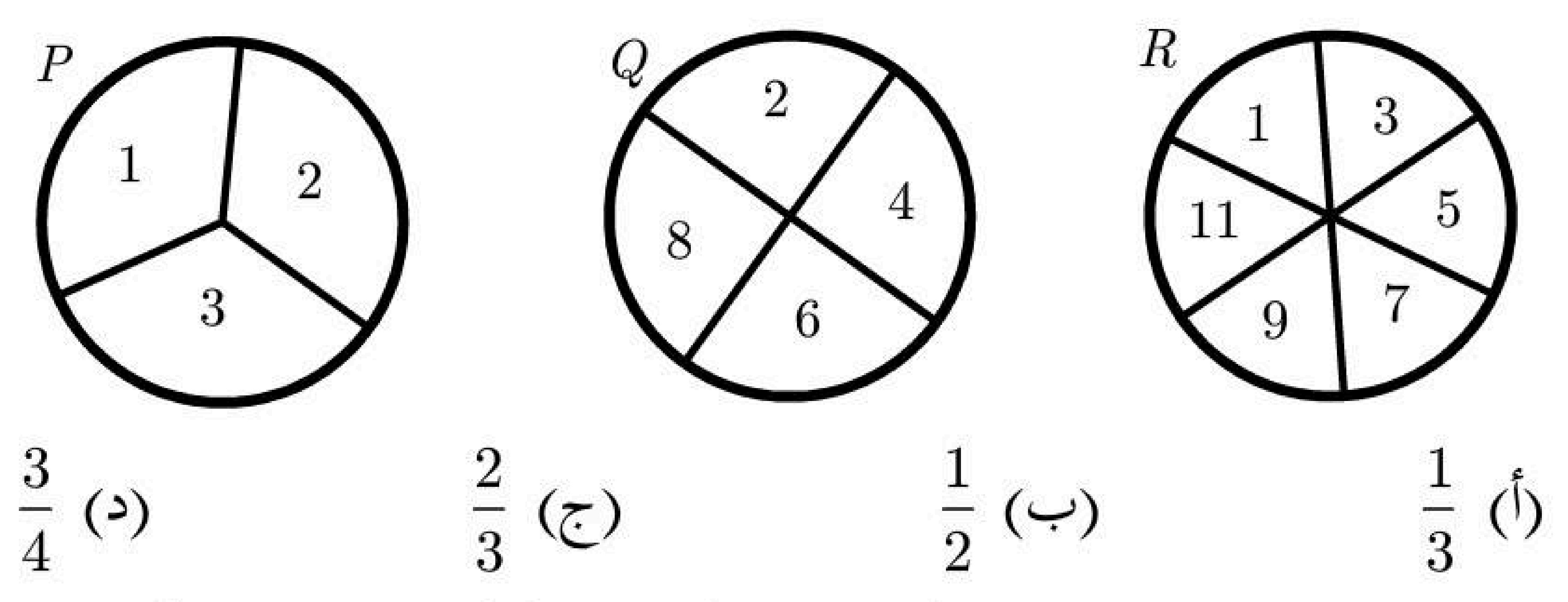
(١٥) [AMC8 2001] رمينا حجري نرد. ما احتمال أن يكون حاصل ضرب العددين مضاعفاً للعد 5؟

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{5}{18}$ (ج) $\frac{11}{36}$ (د) $\frac{13}{36}$

(١٦) [AMC8 2002] رمى سعيد قطعة نقود أربع مرات. ما احتمال أن يكون عدد الصور التي حصل عليها أكبر من أو يساوي عدد الكتابات ؟

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{5}{18}$ (ج) $\frac{11}{16}$ (د) $\frac{13}{16}$

(١٧) [AMC8, 2006] بعد توقف دوران الدواليب الثلاثة P , Q , R في الشكل المرفق وجمع الأعداد الثلاثة ما احتمال الحصول على مجموع فردي ؟



(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{3}{4}$

(١٨) [AMC8 2008] رسمنا 8 نقاط على محيط مربع طول ضلعه 2سم كما هو مبين في الشكل. اخترنا نقطتين عشوائياً. ما احتمال أن يكون البعد بين النقطتين 1سم؟

(أ) $\frac{2}{7}$ (ب) $\frac{3}{7}$ (ج) $\frac{4}{5}$ (د) $\frac{5}{7}$

(١٩) [AMC8 2008] رقمنا بلاطات بالأعداد من 1إلى 10ثم وضعناها على سطح مكتب بحيث تكون الأعداد غير ظاهرة. قلبنا إحدى البلاطات عشوائياً ثم رمينا حجر نرد. ما احتمال أن يكون حاصل ضرب العدد الظاهر على البلاطة والعدد الظاهر على حجر النرد مربعاً كاملاً ؟

(أ) $\frac{7}{60}$ (ب) $\frac{11}{60}$ (ج) $\frac{13}{60}$ (د) $\frac{17}{60}$

(٢٠) [MAΘ 2010] في لعبة التنس بين سامي وكمال نسبة فوز سامي إلى كمال

هي 3إلى 8. ما احتمال فوز كمال ؟

(أ) $\frac{5}{11}$ (ب) $\frac{6}{11}$ (ج) $\frac{7}{11}$ (د) $\frac{8}{11}$

(٢١) [MAΘ 2007] وضعنا 5 كرات في ثلاثة صناديق عشوائياً. ما احتمال أن نكون قد وضعنا ثلاث كرات في الصندوق الأول وكرتين في الصندوق الثاني و لم نضع أي كرة في الصندوق الثالث ؟

(أ) $\frac{8}{243}$ (ب) $\frac{9}{243}$ (ج) $\frac{10}{243}$ (د) $\frac{11}{243}$

(٢٢) [MAΘ 2007] ألقى اللاعب A حجر نرد ذو ستة وجوه وألقى اللاعب B في الوقت نفسه حجر نرد آخر مماثلاً للحجر الذي ألقاه اللاعب A. إذا كان العدد الظاهر على الحجر الذي ألقاه B أكبر من أو يساوي العدد الظاهر على الحجر الذي ألقاه اللاعب A فإن B يكسب. ما احتمال أن يكسب اللاعب A ؟

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{5}{12}$ (د) $\frac{1}{2}$

(٢٣) [MAΘ 2007] لدينا أربعة صناديق, يحتوي الصندوق الأول على كرة خضراء وأربع كرات زرقاء ويحتوي الصندوق الثاني على كرتين خضراوين وثلاث كرات زرقاء ويحتوي الصندوق الثالث على ثلاث كرات خضراء وكرتين زرقاوين ويحتوي الصندوق الرابع على أربع كرات خضراء وكرة زرقاء. اخترنا صندوقاً عشوائياً وسحبنا منه كرتين. ما احتمال ان يكون لون كل منهما أزرق ؟

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) 1

(٢٤) [MAΘ 2007] إذا كان احتمال وقوع حدث أربع مرات لكل خمس محاولات هو $\frac{10}{243}$ فما احتمال وقوعه في محاولة واحدة ؟

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{3}{4}$

(٢٥) [MAΘ 2007] تقدم عشرة أشخاص حاصلين على شهادة الدكتوراه للعمل كأعضاء هيئة تدريس في قسم الرياضيات. إذا اخترنا خمسة أشخاص عشوائياً من بينهم فما احتمال أن يكون ثلاثة أشخاص من بين هؤلاء الخمسة هم من بين أفضل خمسة أشخاص من بين المتقدمين العشرة ؟

(أ) 0.297 (ب) 0.321 (ج) 0.335 (د) 0.397

(٢٦) [MAΘ 2007] يوجد العديد من اختبارات قياس درجة التوتر عند الأشخاص. درجات كل من هذه الاختبارات هي $1, 2, 3, 4, 5$ باحتمالات متساوية. اخترنا خمسة اختبارات عشوائياًلإجرائها على شخص. ما احتمال أن تكون درجات هذه الاختبارات الخمسة هي $1, 2, 3, 4,$ 5على التوالي ؟

(أ) $\frac{24}{625}$ (ب) $\frac{29}{625}$ (ج) $\frac{31}{625}$ (د) $\frac{37}{625}$

(٢٧) [MAΘ 2007] اخترنا عشوائياً مجموعة جزئية Tمن مجموعة جميع المجموعات الجزئية من المجموعة $S = \{1,2,3,\cdots,20\}$. ما احتمال أن يكون 18هو أكبر عناصر T؟

(أ) $\frac{1}{8}$ (ب) $\frac{1}{7}$ (ج) $\frac{1}{6}$ (د) $\frac{1}{5}$

(٢٨) [MAΘ 2007] لنفرض وجود نملة على كل من رؤوس مربع وأن كلاً من

هذه النملات ستتحرك على أحد الضلعين الواقعين على الرأس الموجودة عليه للوصول إلى الرأس الآخر. إذا كان قرار التحرك على أحد الضلعين عشوائياً فما احتمال عدم تلاقي أي من النملات أثناء تحركها ؟

(أ) $\frac{1}{9}$ (ب) $\frac{1}{8}$ (ج) $\frac{1}{7}$ (د) $\frac{1}{6}$

(٢٩) [MAΘ 2007] اختارت نوره عددين مختلفين من بين الأعداد $\{1,2,3,\cdots,10\}$. ما احتمال أن يقبل مجموعهما القسمة على 5؟

(أ) $\frac{4}{45}$ (ب) $\frac{1}{9}$ (ج) $\frac{2}{15}$ (د) $\frac{7}{45}$

(٣٠) [MAΘ 2007] تتحرك نملة من نقطة الأصل 1سم كل دقيقة باتجاه الشرق أو الغرب أو الشمال أو الجنوب. ما احتمال أن ترجع النملة إلى نقطة الأصل بعد 4 دقائق ؟

(أ) $\frac{7}{64}$ (ب) $\frac{1}{8}$ (ج) $\frac{9}{64}$ (د) $\frac{5}{32}$

(٣١) [AMC10A 2006] اخترنا 6أعداد صحيحة موجبة مختلفة من بين الأعداد 1إلى 2006. ما احتمال أن يقبل الفرق بين زوج من هذه الأعداد القسمة على العدد 5؟

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{3}{4}$ (ج) $\frac{4}{5}$ (د) 1

(٣٢) [AMC10B 2006] مع كل من أليس وبوب كيس يحتوي على كرة بيضاء وكرة سوداء وكرة حمراء وكرة زرقاء وكرة خضراء. اختارت أليس كرة عشوائياً من كيسها ووضعتها في كيس بوب. بعد ذلك اختار بوب كرة عشوائياً من كيسه ووضعها في كيس أليس. ما احتمال أن تكون محتويات

الكيسين نفسها بعد هذه العملية ؟

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{3}{4}$

(٣٣) [AMC10B 2006] حجرا نرد احتمالات ظهور $1, 2, 3, 4, 5, 6$ على كل منهما هي 1 إلى 2 إلى 3 إلى 4 إلى 5 إلى 6 على التوالي. ألقينا الحجرين مرة واحدة. ما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين هو 7؟

(أ) $\frac{5}{63}$ (ب) $\frac{6}{63}$ (ج) $\frac{8}{63}$ (د) $\frac{11}{68}$

(٣٤) [MAΘ 2007] لنفرض احتمال أن يضرب البرق بناية عالية جداً في أي يوم من الأيام هو $\frac{2}{5}$. أي يوم من الأيام يمكن أن يكون ماطراً أو غير ماطر. إذا زاد احتمال أن يضرب البرق بناية عالية جداً في اليوم الماطر إلى $\frac{3}{5}$ وتناقص احتمال ضرب البرق بناية عالية جداً في اليوم غير الماطر إلى $\frac{3}{10}$ فما احتمال أن يكون اليوم المختار عشوائياً ماطراً ؟

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) 1

(٣٥) [MAΘ 2006] إذا كان احتمال أن يكسب يزيد الميدالية الذهبية لمسابقة الأولمبياد في الرياضيات لهذا العام هو $\frac{1}{10}$ واحتمال أن يكسب يزيد الميدالية الفضية هو $\frac{1}{3}$ فما احتمال أن لا يكسب يزيد أياً من الميداليتين ؟

(أ) $\frac{1}{5}$ (ب) $\frac{2}{5}$ (ج) $\frac{3}{5}$ (د) $\frac{4}{5}$

(٣٦) [MAΘ 2006] اخترنا عددين صحيحين عشوائياً مع الإحلال من المجموعة

$\{-5,-4,\cdots,5\}$. ما احتمال أن يكون حاصل ضربهما سالباً ؟

(أ) $\frac{49}{121}$ (ب) $\frac{50}{121}$ (ج) $\frac{51}{121}$ (د) $\frac{53}{121}$

(٣٧) [MAΘ 2006] لعب جمال وكمال شطرنج طوال اليوم. كسب جمال 11 مباراة وكسب كمال 5 مباريات. إذا كانت احتمالات جميع متتاليات الربح متساوية فما احتمال أن يكون جمال قد كسب المباراة الأولى ؟

(أ) $\frac{7}{16}$ (ب) $\frac{9}{16}$ (ج) $\frac{11}{16}$ (د) $\frac{13}{16}$

(٣٨) [AMC10A, AMC12A 2007] اخترنا أعداداً صحيحة a، b، c، d ليست بالضرورة مختلفة عشوائياً من مجموعة الأعداد $0,1,2,\cdots,2007$. ما احتمال أن يكون الفرق $ad-bc$ زوجياً ؟

(أ) $\frac{5}{8}$ (ب) $\frac{3}{4}$ (ج) $\frac{7}{8}$ (د) 1

(٣٩) [AMC10A 2008] استخدمت هيفاء الطريقة التالية لتوليد متتالية من الأعداد: الحد الأول من المتتالية يساوي 6. للحصول على الحدود بعد الحد الأول تقوم سعاد بإلقاء قطعة نقود. إذا كان الوجه الظاهر صورة, تقوم سعاد بمضاعفة حد المتتالية وطرح 1 من الناتج وإذا كان الوجه الظاهر كتابة تقوم سعاد بقسمة حد المتتالية على 2 وطرح 1 من الناتج لتحصل على الحد الذي يلي ذلك. ما احتمال أن يكون الحد الرابع من متتالية سعاد عدداً صحيحاً ؟

(أ) $\frac{3}{8}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{5}{8}$ (د) $\frac{7}{8}$

(٤٠) [AMC10B 2008] وضعنا ثلاث خرزات حمراء, خرزتان بيضاوان, خرزة

واحدة زرقاء عشوائياً في صف واحد. ما احتمال أن لا تكون خرزتان متجاورتان لهما اللون نفسه ؟

(أ) $\frac{1}{6}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{2}{3}$

(٤١) رمينا 100قطعة نقود متماثلة مرة واحدة. إذا كان احتمال ظهور صورة على كل منها هو p واحتمال ظهور صورة على 50قطعة يساوي احتمال ظهور صورة على 51قطعة فما قيمة p ؟

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{50}{101}$ (ج) $\frac{51}{101}$ (د) $\frac{53}{100}$

(٤٢) أثناء التدريب على إطلاق النار لاحظ أحمد أنه يصيب الهدف مرة واحدة من بين كل خمس محاولات. إذا أطلق أحمد النار 5مرات فما احتمال أن يصيب

الهدف ؟

(أ) $\frac{1024}{3125}$ (ب) $\frac{2101}{3125}$ (ج) $\frac{3101}{3125}$ (د) 1

(٤٣) إذا كان احتمال إصابة أحمد للهدف هو 3أمثال عدم إصابته الهدف. ما احتمال إصابة أحمد للهدف 3مرات من بين 5محاولات ؟

(أ) $\left(\frac{1}{4}\right)^4$ (ب) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ (ج) $\frac{135}{512}$ (د) $\frac{135}{1024}$

(٤٤) سألنا الطفلين أحمد وبدر السؤال التالي: من منكما سكب الحليب ؟ إذا علمنا من تجارب سابقة أن أحمد يقول الصدق في 7أعشار الحالات وبدر يقول الصدق في 3أخماس الحالات فما احتمال أن تكون إجابتهما عن السؤال متناقضة ؟

(أ) $\frac{23}{50}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{27}{50}$ (د) 1

(٤٥) اخترنا 7 أعداد من بين الأعداد $1,2,3,\cdots,100$. ما احتمال أن يكون العدد 50 هو وسيط هذه الاعداد ؟

(أ) 0.01 (ب) 0.02 (ج) 0.03 (د) 0.04

(٤٦) كونا عدداً من خمس مراتب مأخوذة من المراتب $1,2,3,4,5$ بدون تكرار. ما احتمال أن يقبل العدد القسمة على العدد 4؟

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{5}$

(٤٧) كتبنا الأعداد من 1 إلى 10 على أوراق حمراء كل منها يحمل عدداً واحداً وكتبنا الأعداد من 11 إلى 30 على أوراق زرقاء كل منها يحمل عدداً واحداً. وضعنا الأوراق جميعاً في صندوق وسحبنا ورقة واحدة. إذا كانت الورقة زرقاء فما احتمال أن يكون العدد المكتوب عليها هو العدد 11؟

(أ) $\frac{1}{30}$ (ب) $\frac{1}{20}$ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{2}{3}$

(٤٨) ألقينا 6 أحجار نرد مرة واحدة. ما احتمال ان يكون مجموع الأعداد الظاهرة يساوي 8؟

(أ) $\frac{1}{6^5}$ (ب) $\frac{15}{6^6}$ (ج) $\frac{21}{6^6}$ (د) $\frac{45}{6^8}$

(٤٩) لدينا 6 أعداد صحيحة موجبة و 8 أعداد صحيحة سالبة. اخترنا 4 أعداد من بينها. ما احتمال أن يكون حاصل ضرب هذه الأعداد موجباً ؟

(أ) $\frac{101}{1001}$ (ب) $\frac{202}{1001}$ (ج) $\frac{303}{1001}$ (د) $\frac{505}{1001}$

(٥٠) اخترنا عدداً من بين الأعداد 1 إلى 100. ما احتمال أن يقبل العدد القسمة

على 11أو 17؟

(أ) $\frac{1}{20}$ (ب) $\frac{9}{100}$ (ج) $\frac{7}{50}$ (د) $\frac{9}{50}$

(٥١) دعا الدكتور محمد بعض زملائه إلى البر يوم الغد. تدل الاحصاءات أن عدد الأيام الماطرة في السنوات القليلة السابقة كان بواقع 11يوماً في السنة. توقعت دائرة الأرصاد الجوية أن يوم غد سيكون ماطراً. عندما يكون الجو ماطراً فإن دائرة الأرصاد الجوية تتوقع ذلك بدقة تساوي 80% .وأما عندما لا يكون الجو ماطراً فإن دائرة الأرصاد الجوية تتوقع أن يكون الجو ماطراً بدقة يساوي 20%. ما احتمال أن يكون الجو ماطراً يوم غد ؟ (عدد أيام السنة

هو 365).

(أ) 0.081 (ب) 0.109 (ج) 0.139 (د) 0.2

(٥٢) لدينا رقعة مربعة طول ضلعها 4 سم. قسمناها إلى 16مربعاً طول ضلع كل منها 1 سم. اخترنا مربعين عشوائياً. ما احتمال أن لا يكونا متجاورين ؟

(أ) $\frac{3}{10}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{7}{10}$ (د) $\frac{9}{10}$

(٥٣) اخترنا عدداً عشوائياً من بين الأعداد 10إلى 99. ما احتمال أن يكون باقي قسمته على مجموع مرتبتيه يساوي 3؟

(أ) $\frac{7}{45}$ (ب) $\frac{8}{45}$ (ج) $\frac{31}{50}$ (د) $\frac{33}{50}$

(٥٤) يختار أحمد عدداً من 1إلى 6ثم يقوم بدر بإلقاء ثلاثة أحجار نرد. إذا ظهر العدد الذي اختاره أحمد على أحد الأحجار الثلاثة يكون هو الرابح. ما احتمال أن يكون أحمد هو الرابح ؟

(أ) 0.4 (ب) 0.42 (ج) 0.5 (د) 0.75

(٥٥) يحتوي الوعاء I على 8 كرات بيضاء وخمس كرات سوداء ويحتوي الوعاء II على 10 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء. سحبنا كرة من الصندوق I ثم أضفناها إلى الصندوق II وبعد ذلك سحبنا كرة من الصندوق II. ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الصندوق I سوداء إذا كانت الكرة المسحوبة من الصندوق II سوداء ؟

(أ) $\frac{25}{72}$ (ب) $\frac{29}{72}$ (ج) $\frac{31}{72}$ (د) $\frac{37}{72}$

(٥٦) رقمنا عشرين كرة متماثلة بالأعداد من 1 إلى 20 ثم وضعناها في وعاء. سحبنا كرة من الوعاء عشوائياً وسجلنا العدد المكتوب عليها ثم أعدناها إلى الوعاء. كررنا ذلك أربع مرات. ما أقرب احتمال أن تكون متتالية الأعداد التي سجلناها على الكرات الأربع تناقصية فعلاً ؟ أي أن $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ إذا كان a_i هو العدد المكتوب على الكرة i.

(أ) 0.42 (ب) 0.45 (ج) 0.46 (د) 0.48

(٥٧) لدينا أربعة صناديق A , B , C , D. يحتوي الصندوق A على 15 كرة حمراء و 5 وكرات خضراء ويحتوي الصندوق B على 13 كرة حمراء و 7 كرات خضراء ويحتوي الصندوق C على 10 كرات حمراء و 10 كرات خضراء ويحتوي الصندوق D على 8 كرات حمراء و 12 كرة خضراء. اخترنا صندوقاً عشوائياًوسحبنا منه كرة عشوائياً ووجدنا أنها حمراء. ما احتمال أن تكون هذه الكرة قد سحبت من الصندوق D؟

(أ) $\frac{2}{23}$ (ب) $\frac{3}{23}$ (ج) $\frac{4}{23}$ (د) $\frac{7}{23}$

(٥٨) اخترنا نقطة (x,y)عشوائياً في المنطقة المحدودة: $1 \leq x \leq 4$و $2 \leq y \leq 6$. ما احتمال أن تقع النقطة في المنطقة $x + y \geq 5$.

(أ) $\frac{1}{6}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) $\frac{4}{5}$ (د) $\frac{5}{6}$

(٥٩) [AIME 1990]ألقينا قطعة نقود 10مرات. ما احتمال عدم ظهور صور في رميات متتالية ؟

(أ) $\frac{3}{64}$ (ب) $\frac{5}{64}$ (ج) $\frac{7}{64}$ (د) $\frac{9}{64}$

(٦٠) [Mathcounts 2005] يلعب أحمد وبدر اللعبة التالية: يقومان بإلقاء حجري نرد مرة واحدة. الرابح هو من يحصل أولاً على الحدث $(1,1)$. إذا بدأ أحمد اللعبة فما احتمال أن يكون هو الرابح ؟

(أ) $\frac{36}{71}$ (ب) $\frac{37}{71}$ (ج) $\frac{38}{71}$ (د) $\frac{39}{71}$

إجابات المسائل غير المحلولة

(١) ب	(٢) أ	(٣) د	(٤) ج	(٥) ج
(٦) د	(٧) أ	(٨) د	(٩) ب	(١٠) ب
(١١) أ	(١٢) ج	(١٣) د	(١٤) ب	(١٥) ج
(١٦) ج	(١٧) أ	(١٨) أ	(١٩) ب	(٢٠) د
(٢١) ج	(٢٢) ج	(٢٣) أ	(٢٤) ب	(٢٥) د
(٢٦) أ	(٢٧) أ	(٢٨) ب	(٢٩) د	(٣٠) ج
(٣١) د	(٣٢) أ	(٣٣) ج	(٣٤) أ	(٣٥) ج
(٣٦) ب	(٣٧) ج	(٣٨) أ	(٣٩) ج	(٤٠) أ
(٤١) ج	(٤٢) ب	(٤٣) ج	(٤٤) أ	(٤٥) ب
(٤٦) د	(٤٧) ب	(٤٨) ج	(٤٩) د	(٥٠) ج
(٥١) ب	(٥٢) د	(٥٣) أ	(٥٤) ب	(٥٥) أ
(٥٦) د	(٥٧) ج	(٥٨) د	(٥٩) د	(٦٠) أ

المراجع
Bibliography

[١] البركاتي، سلطان سعود، مبادئ أساسـية لأولمبيـاد الرياضـيات، مطـابع الحميضي، الطبعة الأولى ١٤٣٢هـ (٢٠١١م).

[٢]الجوعي، عبدالله محمد، مسائل تحضيرية لأولمبياد الرياضيات، مطابع الحميضي، الطبعة الأولى، ١٤٣١هـ (٢٠١٠م).

[٣] سمحان، معروف عبدالرحمن وأبوعمه، عبدالرحمن محمد سليمان والـذكير، فوزي أحمد، قاموس العلوم الرياضية، النشر العلمي والمطـابع، منشـورات جامعة الملك سعود ١٤٢٢هـ (٢٠٠١م).

[٤] سمحان، معروف عبدالرحمن والسنوسي، صالح عبدالله، استراتيجيات حلول المسائل (مترجم)، مطابع الحميضي ١٤٣٤هـ (٢٠١٣م).

[5] Atkins WJ, Edwards JD, King DJ, O'Halloran PJ,and Taylor PJ, Australian Mathematics Competition Book 1 (1978-1984), AMT Publishing 2004.

[6] Atkins WJ, Munro JE, and Taylor PJ,Australian Mathematics Competition (1992-1998), AMT Publishing 2009.

[7] Atkins WJ, Taylor PJ, Australian Mathematics Competition (1999-2005), AMT Publishing 2007.

[8] Batterson J, Competition Math For Middle School, AoPSInc, 2011.

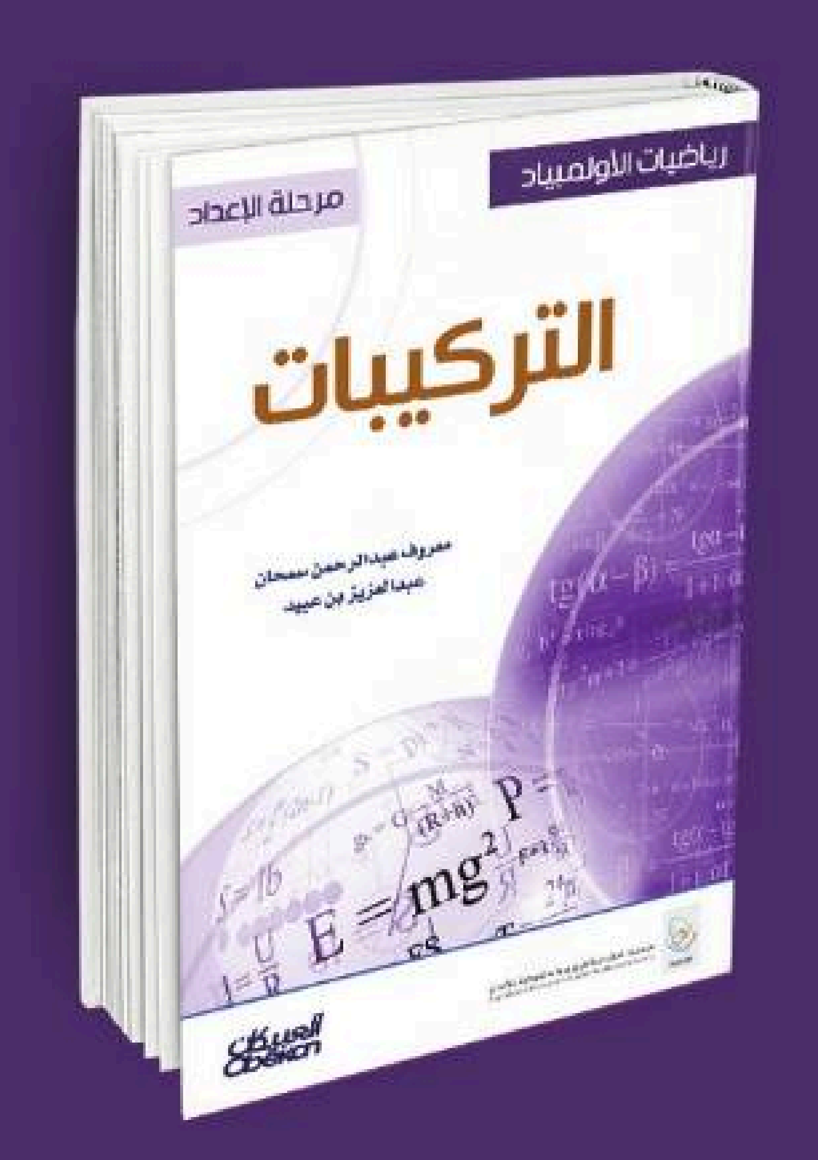
[9] Canadian Mathematics Competitions, Past Contest Problems With Solutions, Gauss (Grade 7), Gauss (Grade 8), Pascal(Grade 9), Cayley (Grade 10), and Fermat (Grade 11) (1997-2012).

[10] LehoczkySandor, and Rusczyk Richard, The Art of Problem Solving,Volume 1: The Basics, 7th Edition, AoPS Inc. 2006.

[11] LehoczkySandor, and Rusczyk Richard, The Art of Problem Solving, Volume 2: And Beyond, 7th Edition, AoPS Inc. 2006.

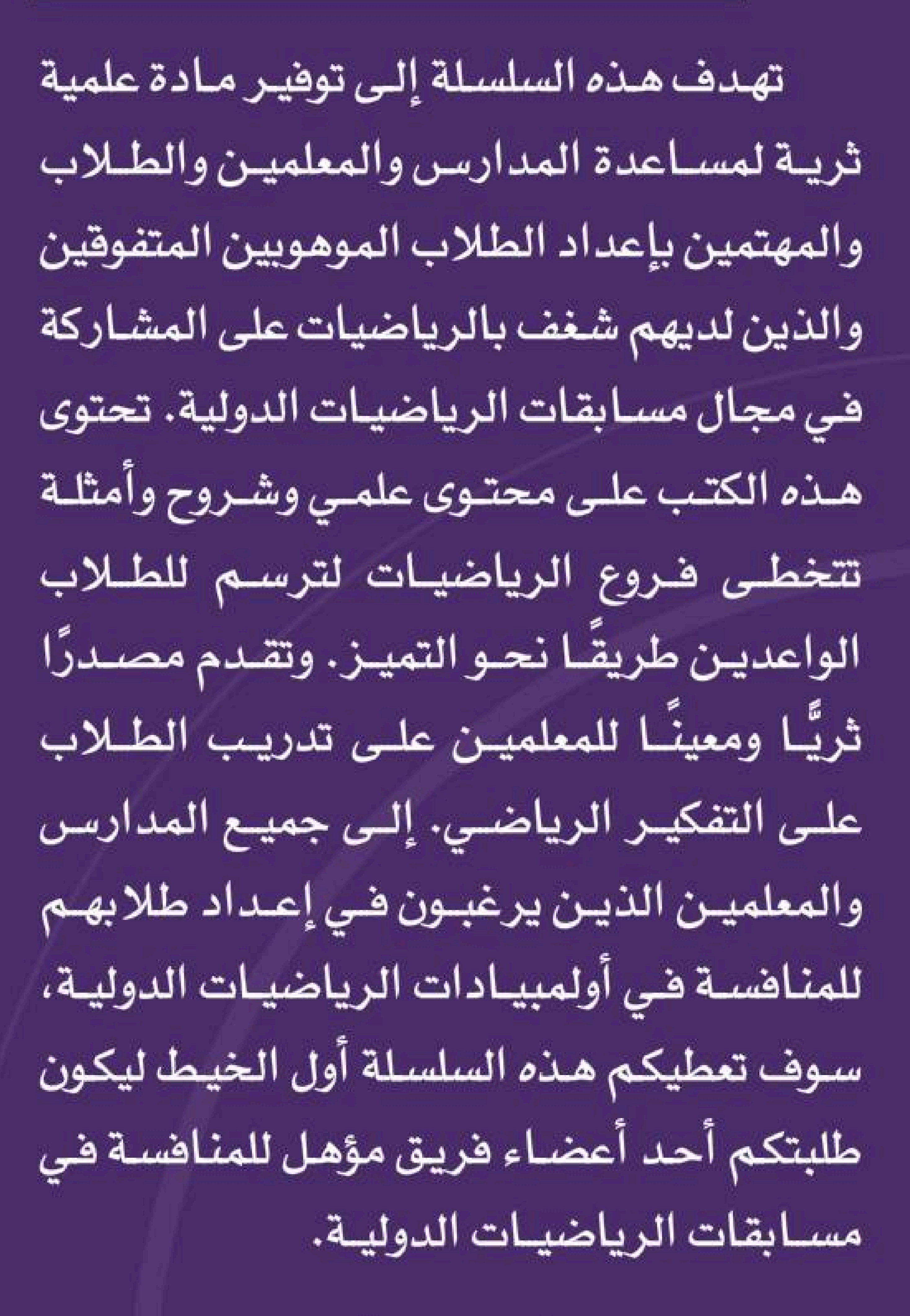
[12] Mu Alpha Theta (MAΘ), A Great Collection of High School Problems and Solutions from Past Contests (1995-2011).

[13] O'Halloran PJ, Pollard GH, and Taylor PJ, Ausralian Mathematics Competition Book 2 (1985-1991), AMT Publishing 2003.



رياضيات الأولمبياد

مرحلة الإعداد



تهدف هذه السلسلة إلى توفير مادة علمية ثرية لمساعدة المدارس والمعلمين والطلاب والمهتمين بإعداد الطلاب الموهوبين المتفوقين والذين لديهم شغف بالرياضيات على المشاركة في مجال مسابقات الرياضيات الدولية. تحتوى هذه الكتب على محتوى علمي وشروح وأمثلة تتخطى فروع الرياضيات لترسم للطلاب الواعدين طريقًا نحو التميز. وتقدم مصدرًا ثريًّا ومعينًا للمعلمين على تدريب الطلاب على التفكير الرياضي. إلى جميع المدارس والمعلمين الذين يرغبون في إعداد طلابهم للمنافسة في أولمبيادات الرياضيات الدولية، سوف تعطيكم هذه السلسلة أول الخيط ليكون طلبتكم أحد أعضاء فريق مؤهل للمنافسة في مسابقات الرياضيات الدولية.

وترمي موهبة من خلال هذه الإصدارات المتخصصة في الرياضيات إلى توفير مادة تدريبية باللغة العربية للمدارس والمعلمين والطلاب، وهي مادة مناسبة لمستويات مختلفة من الطلاب.

موضوع الكتاب
١- الرياضيات - تعليم
٢- الأعداد

رأيك يهمنا





ISBN:978-603-503-803-4
9 786035 038034